VI командно-личный турнир «Математическое многоборье»

4–9 ноября 2013 года г. Москва

Старшая лига

Командная олимпиада

1. (3) Две медианы разбивают треугольник на четырехугольник и три равнобедренных треугольника. Докажите, что исходный треугольник тоже равнобедренный.

(А. Шаповалов)

2. (4) Существуют ли 2013 ненулевых вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2013}$ таких, что для бесконечно многих натуральных n верно равенство $x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{2013}^n = 0$?

(А. Устинов)

3. (4) Есть куб со стороной 1 м и набор из пяти красок. Сначала Петя режет куб на равные меньшие кубики размера не более 1 см (размер он выбирает сам). Затем Вася красит кубики как хочет (не обязательно все одинаково), но так, чтобы каждая грань была одноцветна. Наконец, Петя складывает куб, используя все кубики. Докажите, что независимо от действий Васи Петя может добиться того, чтобы каждая грань большого куба была одноцветной.

(А. Шаповалов)

4. (5) Пусть $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — неубывающая *мультипликативная функция* (т. е. для любых взаимно простых натуральных m и n верно равенство $f(mn) = f(m)f(n)$). Докажите, что

$$f(8)f(13) \geqslant (f(10))^2.$$

(фольклор)

5. (5) Три бегуна тренируются на одной прямой дорожке. Их скорости различны, но постоянны. Добежав до конца дорожки, бегун мгновенно разворачивается и бежит обратно, затем разворачивается на другом конце, и т. д. Пять раз случалось, что все бегуны оказывались в одной точке. Докажите, что такие встречи всех троих будут продолжаться и впредь.

(А. Шаповалов)

6. (6) Пусть $p > 3$ — простое число. Докажите, что следующая сумма делится на p:

$$\left(\sum_{2\leqslant i<j<k\leqslant p-1} ijk\right) + 1.$$

(Indonesia NO 2013)

7. (6) На сторонах AB, BC, CD и DA ромба $ABCD$ соответственно выбраны точки E, F, G и H таким образом, что отрезки EF и GH касаются вписанной в ромб окружности. Докажите, что прямые EH и FG параллельны.

(Georgia TST 2005)

8. (8) Дан граф, степени всех вершин которого не превосходят 7. Оказалось, что его вершины нельзя покрасить правильным образом в 6 цветов. Докажите, что в нем есть три попарно соединенные вершины.

(Г. Ненашев)

9. (9) Докажите, что в остроугольном треугольнике сумма длин медиан не превосходит суммы радиусов вневписанных окружностей.

(Ф. Ивлев)

10. (10) Для натуральных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_r, больших 1, через $[a_1, a_2, \ldots, a_r]$ обозначим выражение

$$\cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_r}}}}.$$

Даны две конечные последовательности a_1, a_2, $\ldots$, a_n и b_1, b_1, $\ldots$, b_m натуральных чисел, больших 1, такие, что

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] + [b_1, b_2, \ldots, b_m] \geqslant 1.$$

Докажите, что найдутся индексы n_1 и m_1 ($1 \leqslant n_1 \leqslant n$ и $1 \leqslant m_1 \leqslant m$) такие, что

$$[a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}] + [b_1, b_2, \ldots, b_{m_1}] = 1.$$

(А. Устинов)