Младшая лига

Командная олимпиада

1. (3) В семье, кроме папы и мамы, двое детей. Все зовут друг друга по имени. Принято, обращаясь к своему ребенку или своему родителю, перечислять всех упомянутых от младшего к старшему, а в разговорах между детьми или между родителями — наоборот. Лёша сказал Свете: «Мы идем в театр: Настя, я и Володя». Как зовут папу и маму?

(А. Шаповалов)

2. (4) Перед началом шахматного турнира участники были занумерованы. Каждый с каждым сыграл по разу. Во всех партиях, которые не закончились вничью, у победителя номер был меньше, чем у побеждённого. Петя победил Васю, но набрал по результатам турнира меньше очков, чем Вася. Каково наименьшее возможное число участников турнира? (Давали 1 очко за победу, 0.5 за ничью, 0 за поражение.)

(А. Шаповалов)

3. (5) Натуральные числа m и $n > 1$ таковы, что $4^m - 1$ делится на n, а $n - 1$ делится на 2^m. Докажите, что $n = 2^m + 1$.

(Indonesia NO 2012)

4. (6) Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. На продолжении стороны AB за точку B отмечена точка D такая, что $\angle DCB = \angle BCA$. На высоте BH треугольника ABC отмечена точка E такая, что $DE = DC$. Докажите, что $\angle BDE = \frac{1}{3}\angle BDC$.

(Georgia TST 2005)

5. (6) В треугольнике ABC выбрана точка P такая, что $\angle ABP = \angle CPM$, где M — середина стороны AC. Прямая MP повторно пересекает описанную окружность треугольника APB в точке Q. Докажите, что $QA = PC$.

6. (7) Дана последовательность натуральных чисел u_0, u_1, …, причем $u_0 = 1$. Оказалось, что существует натуральное k такое, что равенство $u_{n+1}u_{n-1} = ku_n$ верно при всех натуральных n. Известно также, что $u_{2013} = 100$. Найдите k.

(British Olympiad 1995)

7. (8) Три бегуна тренируются на одной прямой дорожке. Их скорости различны, но постоянны. Добежав до конца дорожки, бегун мгновенно разворачивается и бежит обратно, затем разворачивается на другом конце, и т. д. Пять раз случалось, что все бегуны оказывались в одной точке. Докажите, что такие встречи всех троих будут продолжаться и впредь.

(А. Шаповалов)

8. (10) Положительные числа x, y и z таковы, что $x + y + z = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{xy}{\sqrt{z+xy}} + \frac{yz}{\sqrt{x+yz}} + \frac{zx}{\sqrt{y+zx}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

(Д. Максимов)

9. (11) Можно ли раскрасить точки плоскости в 2013 цветов (то есть сопоставить каждой точке плоскости натуральное число от 1 до 2013) так, чтобы на любой прямой и на любой окружности (ненулевого радиуса) встречались бы точки всех цветов?

(Жюри)