VI командно-личный турнир «Математическое многоборье»

4–9 ноября 2013 года г. Москва

Старшая лига

Регата

Первый тур

1. Назовем натуральное число *интересным*, если оно — степень тройки или представимо в виде суммы различных степеней тройки. Интересные числа занумеровали по возрастанию. Найдите сотое число.

(фольклор)

1. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AC выбрали точки M и N (M между A и N). Оказалось, что $\angle MBN = 45°$. Докажите, что из отрезков AM, MN и NC можно сложить прямоугольный треугольник.

(фольклор)

1. Вершины замкнутой несамопересекающейся восьмизвенной ломаной совпадают с вершинами куба. Докажите, что у этой ломаной найдутся четыре звена одинаковой длины.

(А. Шаповалов)

Второй тур

2. Для скольких натуральных N от 1 до 2013 уравнение $x^{[x]} = N$ имеет решение в положительных вещественных x? ($[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее x.)

(фольклор)

2. Пусть Q — точка внутри выпуклого многогранника M. Прямая ℓ, проходящая через Q, пересекает поверхность многогранника в точках A и B. Докажите, что для бесконечного множества направлений прямой ℓ верно, что $AQ = BQ$.

(Putnam 1977 B4 Problem)

2. На доске $4n \times 4n$ расставляют $4n^2$ королей так, чтобы они не били друг друга. Докажите, что число таких расстановок не больше, чем 12^{2n^2}.

(А. Шаповалов)

Третий тур

3. У квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ коэффициент $a \neq 0$. Докажите, что при некотором иррациональном x значение $ax^2 + bx + c$ — рационально.

(С. Когаловский, А. Шаповалов)

3. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ на сторонах AB, BC, CD и DA лежат точки K, L, M и N соответственно, такие что $AK = KB = 6$, $BL = 3$, $LC = 12$, $CM = 4$, $MD = 9$, $DN = 18$, $NA = 2$. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ вписанный.

(Ф. Бахарев)

3. Назовем *ценной цифрой* числа любую из цифр, встречающихся в его десятичной записи не большее число раз, чем каждая из остальных цифр (это может быть и цифра, не встречающаяся в записи n). Петя составляет бесконечную последовательность цифр: на n-е место он ставит любую из ценных цифр числа n. Может ли Петя получить последовательность, периодическую с некоторого места?

(А. Шаповалов)

Четвертый тур

4. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник. Все ребра этой призмы имеют натуральные длины, а площади некоторых двух её граней равны 13 и 30. Найдите стороны основания этой призмы.

(KöMaL journal)

4. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность Γ. Биссектриса угла A пересекает отрезок BC в точке E. Пусть M — середина дуги BAC. Прямая ME повторно пересекает Γ в точке D. Докажите, что центр описанной окружности треугольника AED совпадает с точкой пересечения касательной к Γ в точке D и прямой BC.

(Italy TST 2002)

4. На доске выписано $2n^2 + 5n$ натуральных чисел, не обязательно различных. Каждое число равно количеству выписанных чисел, не равных ему. Каково наибольшее количество различных чисел среди выписанных?

(А. Шаповалов)