Регата

Первый тур

1. Имеется куча из нескольких конфет. Сначала Малыш съедает из этой кучи одну конфету, затем Карлсон съедает из этой кучи две конфеты, затем Малыш — три, Карлсон — четыре и так далее. Если в какой-то момент число оставшихся конфет меньше, чем должен съесть Малыш или Карлсон очередным ходом, то он доедает все конфеты. Оказалось, что Малыш съел 101 конфету. Сколько всего конфет было изначально?

(А. Шаповалов)

1. Точки M, N, P — середины сторон AB, CD и DA вписанного четырехугольника $ABCD$. Известно, что $\angle MPD = 150^\circ$, $\angle BCD = 140^\circ$. Найдите угол $\angle PND$.

(Д. Максимов)

1. Трём братьям надо перевезти с одной квартиры на другую рояль весом 250 кг, диван весом 100 кг и более 100 коробок по 50 кг. Был нанят небольшой фургон с шофером на 5 рейсов туда (и 4 обратно), который может за раз перевезти 500 кг груза и одного пассажира. Погрузить или выгрузить диван братья могут вдвоём, рояль — втроём, с коробками любой из братьев справляется в одиночку. Надо перевезти всю мебель и как можно больше коробок. Какое наибольшее число коробок удастся перевезти? (Шофер не грузит, другого транспорта и помощников нет, пассажиров вместо груза везти нельзя).

(А. Шаповалов, Д. Шаповалов)

Второй тур

2. По кругу стоят 2013 натуральных чисел. Оказалось, что в любой паре соседних чисел одно из них делится на другое. Докажите, что найдутся два несоседних числа, одно из которых тоже делится на другое.

(А. Шаповалов)

2. На плоскости даны 2013 отрезков единичной длины, каждый пересекается с каждым. Докажите, что все их можно накрыть кругом радиуса 1.5.

(А. Шаповалов)

2. Фабрика выпускает наборы из $n > 2$ слоников различной величины. По стандарту разница масс соседних слоников внутри каждого набора должна быть одной и той же. Контролер проверяет наборы по одному с помощью чашечных весов без гирь. При каком наименьшем n это возможно?

(А. Шаповалов)

Третий тур

3. Вася выписал на доску числа от 1 до 20132013. На сколько больше он написал единиц, чем троек?

(фольклор, предложил Д. Максимов)

3. В неравнобедренную трапецию $ABCD$ вписана окружность с центром O. Точка M — середина более длинного основания AB. Прямая MO пересекает отрезок CD в точке F. E — точка касания CD и окружности. Докажите, что $DE = CF$ тогда и только тогда, когда $AB = 2CD$.

(Polish NO 1993)

3. Шахматная доска покрыта 32 домино (каждое домино покрывает ровно два поля). Докажите, что эти домино можно повернуть на 90 или на 180 градусов (каждое — вокруг центра одной из закрываемых им клеток, поворачивать можно независимо друг от друга и в любую сторону), чтобы по-прежнему вся доска была покрыта.

(А. Шаповалов)

Четвертый тур

4. В клетках квадрата 100×100 вписаны натуральные числа так, что все 200 сумм в рядах (строках и столбцах) различны. Какова наименьшая возможная сумма всех чисел в таблице?

(Д. Максимов)

4. В параллелограмме $ABCD$ выполнено $BD = BC$. Точка M на AC такова, что $3AM = AC$. Докажите, что $AM = BM$.

(13-й Уральский турнир, высшая лига)

4. На нижней ступеньке лестницы из 350 ступенек лежит 350 камней, остальные ступеньки пусты. За одну ходку Сизиф может взять с любой ступеньки группу из одного или нескольких камней (не обязательно всех, лежащих на этой ступеньке), и переложить всю группу вверх или вниз на число ступенек, равное числу камней в группе (группу из одного камня на соседнюю ступеньку, группу из двух камней — через одну ступеньку вверх или вниз и т. д.). Помогите Сизифу переложить все камни на соседнюю ступеньку, сделав не более 21 ходки.

(А. Шаповалов)