

Алгебра и теория чисел

1. В клетках квадрата 100×100 вписаны натуральные числа так, что все 200 сумм в рядах (строках и столбцах) различны. Какова наименьшая возможная сумма всех чисел в таблице?

(Д. Максимов)

2. Пусть возрастающая функция $f: (0; \infty) \rightarrow (0; \infty)$ для любого $x > 0$ удовлетворяет неравенству $f(2x) \leq 4f(x+1)$. Докажите, что для любого $x > 1$ выполнено

$$f(x) \leq f(4)x^2.$$

(В. Быковский)

3. Пусть

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 &= y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + y_4^3. \end{aligned}$$

Докажите, что

$$(x_1 - y_2)(x_1 - y_3)(x_1 - y_4) = (y_1 - x_2)(y_1 - x_3)(y_1 - x_4).$$

(А. Устинов)

4. Найдется ли последовательность из 1000000 натуральных чисел, взаимно простых с 10, в которой каждое следующее делится на предыдущее, но имеет меньшую сумму цифр?

(А. Шаповалов)