

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ИМЕНИ Г.П. КУКИНА

1.02.2026 6 класс

Математическая олимпиада ОмГУ носит имя профессора Г.П. Кукина, создателя системы городских математических олимпиад.

ДОВЫВОД

1. Короли решили разделить земли на королевства. На карте стоят шесть замков – по одному для каждого короля. Чтобы раздел получился честным, они удалили ровно две пустые клетки (без замков), а затем разрезали оставшуюся фигуру на шесть связанных частей равной площади, в каждой из которых ровно один замок. Какие две клетки они удалили? (Круглова И.А.)

	♠		♠	♠
	♠			
	♠			♠

2. Какие значения может принимать Дь, если $Л \cdot О \cdot Ш \cdot А + Дь = 2026$

(разные буквы – разные цифры). (Пахомова К.Н.)

3. В королевстве Черновой Королевы принята календарная реформа:

– каждый год состоит ровно из 363 дней;

– високосным считается год, номер которого делится на 29 без остатка. Такой год длится 364 дня.

По указу Её Величества праздник Больших голов всегда отмечается в первое воскресенье февраля. Известно, что в 2026 году этот праздник пришёлся на 1 февраля.

В каком ближайшем году после 2026-го праздник снова выпадет на 1 февраля?

(Фаткудинов В.К.)

4. Прямоугольник разбит на несколько меньших прямоугольников.

В некоторых из них указаны площади. Найдите площадь закрашенного прямоугольника. (Фаткудинов В.К.)

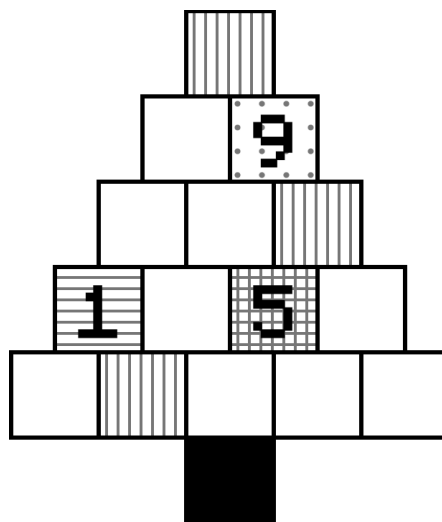
20	36	
	14	
16	28	

5. Дети, у которых чётное число пятёрок, всегда преувеличивают свои заслуги. А дети, у которых нечётное число пятёрок, преуменьшают из скромности. При этом девочки всегда ошибаются на 1, а мальчики на 2. Саша говорит: «У меня 8 пятёрок». Женя: «У меня 9 пятёрок». Валя говорит: «А у меня - 10». На самом деле у Вали меньше всех пятёрок. Кто из ребят мальчик, а кто девочка? (Кукина Е.Г.)

6. Два велосипедиста стартуют одновременно из одной точки кругового велотрека. Если они будут ехать в одну сторону, то первый будет обгонять второго каждые 2 минуты, а если они будут ехать в разные стороны, то их встреча будет происходить каждые 20 секунд. Сколько кругов проедет медленный велосипедист к тому времени, когда быстрый закончит тренировку, проехав 100 кругов? (Штерн А.С.)

ВЫВОД

7. Петя и Вася решили создать новогоднее настроение и построить ёлку, как на чертеже. Они хотят заполнить каждый блок ёлки целыми числами от 1 до 9 так, чтобы каждое число (кроме чисел в нижнем ряду) было равно сумме или разности двух чисел, стоящих непосредственно под ним. Если в двух блоках записаны одинаковые числа, то эти блоки окрашены одинаково. Некоторые блоки уже окрашены изначально и их цвет нельзя изменить. Белые блоки считаются неокрашенными. (Фаткудинов В.К.)



8. Трое детей получили каждый по натуральному числу, их произведение равно 5000. «Моё делится на 8», - сказала Алина. «Моё делится на 50», - сказал Гриша. «А моё делится на 125», - сказала Саша. Оказалось, ошибся только один из них. Какое наибольшее число могло быть у Алины? (Шаповалов А.В.)

9. Можно ли представить число 2026 как сумму пяти натуральных чисел, в записи которых участвуют все десять цифр, в каждом из чисел цифры не повторяются, и в записи любых двух чисел нет одинаковых цифр? (Фаткудинов В.К.)

10. В ряд сидят несколько мальчиков и девочек. Каждый мальчик посчитал, сколько детей сидит между ним и ближайшим мальчиком, и записал это число на доску. Среди записанных чисел есть 7 различных. Каково наименьшее количество детей? (Шаповалов А.В.)

Решения (Довывод):

- Короли решили разделить земли на королевства. На карте стоят одному для каждого короля. Чтобы раздел получился честным, две пустые клетки (без замков), а затем разрежали оставшуюся связанных частей равной площади, в каждой из которых ровно один замок удалили?

Ответ: например



- Какие значения может принимать ДБ, если $Л \cdot О \cdot Ш \cdot А + ДБ = 2026$

(разные буквы – разные цифры).

Ответ: ДБ = 10.

Решение: Поскольку ДБ — двузначное число, $10 \leq ДБ \leq 98$ (по условию: разные буквы – разные

цифры), то $2026 - 98 \leq Л \cdot О \cdot Ш \cdot А \leq 2026 - 10 \Leftrightarrow 1928 \leq Л \cdot О \cdot Ш \cdot А \leq 2016$. Чтобы произведение

четырёх различных ненулевых однозначных чисел $Л \cdot О \cdot Ш \cdot А$ попало в этот диапазон, в нём

обязательно должны присутствовать 8 и 9, иначе не будет достигнута нижняя оценка, а также 7,

поскольку: $9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 = 2160$; $9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 = 1728$. За последней буквой может скрываться единственное

число 4, поскольку все остальные приводят к нарушению требуемой оценки. Получаем, что

$Л \cdot О \cdot Ш \cdot А = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 2016 \Rightarrow$ искомая ДБ = 10.

- В королевстве Червой Королевы принята календарная реформа:

– каждый год состоит ровно из 363 дней;

– високосным считается год, номер которого делится на 29 без остатка. Такой год длится 364 дня.

По указу Её Величества праздник Больших голов всегда отмечается в первое воскресенье февраля. Известно, что в 2026 году этот праздник пришёлся на 1 февраля. В каком ближайшем году после 2026-го праздник снова выпадёт на 1 февраля?

Ответ: в 2034 году.

Решение: При делении на 7 обычный год (363 дня) даёт остаток 6, поэтому день недели сдвигается на 6 дней вперёд. Високосный год (364 дня) делится на 7 без остатка, сохраняет день недели прошлого года. В 2026 году 1 февраля — воскресенье. Годы 2026, 2027, 2028, 2029 —

обычные, их суммарный сдвиг: $6 \cdot 4 = 24$, что при делении на 7 даёт остаток 3. Значит, 1 февраля

2030 года — среда. Год 2030 високосный ($2030 = 29 \cdot 70$), поэтому 1 февраля 2031 года остаётся средой. После чего в ближайшее время високосных годов не будет, поэтому требуется сместить

день недели на три позиции назад (со среды до воскресенья). Три следующих года в сумме дают сдвиг на три позиции назад. Тем самым в 2034 году 1 февраля настанет в воскресенье.

4. Исходный прямоугольник разбит на несколько меньших  прямоугольников. В некоторых из них указаны площади. Найдите площадь закрашенного прямоугольника.

Ответ: 30.

Решение: Заметим, что есть у прямоугольников есть одинаковая сторона, то их площади относятся как другие стороны. Продлим одну из сторон исходной задачи, так как 14 в два раза меньше, чем 28, то высоты у в два раза меньше чем 16 (ширина у них одинаковая), поэтому $y=8$. Тогда остаток от 20 равен 12. Это в три раза меньше, чем 36, значит и $(y+16)$ в три раза меньше, чем $(14+28+x)$. То есть $14+28+x=3 \cdot 24=72$. Откуда искомая площадь равна 30.

20	36	
y	14	x
16	28	

5. Дети, у которых чётное число пятёрок, всегда преувеличивают свои заслуги. А дети, у которых нечётное число пятёрок, преуменьшают из скромности. При этом девочки всегда ошибаются на 1, а мальчики на 2. Саша говорит: «У меня 8 пятёрок». Женья: «У меня 9 пятёрок». Валя говорит: «А у меня 10». На самом деле, у Вали меньше всех пятёрок. Кто из ребят мальчик, а кто девочка?

Ответ: Саша, Женья

Решение: они все девочки

Если Саша мальчик, у него на самом деле 6 пятёрок, а если девочка – то у неё 9 пятёрок. Если Женья мальчик, то у него 11, если девочка – 8. Если Валя мальчик – 8, девочка – 11.

Так как в сумме 31 – то только $11+11+9$. Александра, Евгений, Валентина.

Так как у Вали меньше всех – то у Вали 8; у Саши 9, у Жени 11. Валентин, Александра, Евгений.

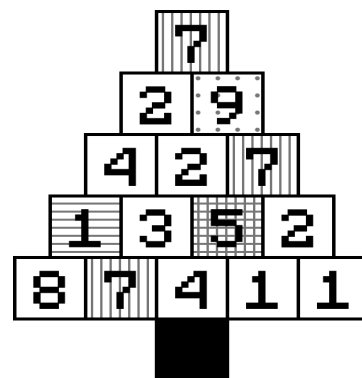
6. Два велосипедиста стартуют одновременно из одной точки кругового велотрека. Если они будут ехать в одну сторону, то первый будет обгонять второго каждые 2 минуты, а если они будут ехать в разные стороны, то их встреча будет происходить каждые 20 секунд. Сколько кругов проедет медленный велосипедист к тому времени, когда быстрый закончит тренировку, проехав 100 кругов?

Ответ: $500/7 = 71 + 3/7$ круга.

Решение: Встреча происходит когда сумма (для “навстречу”) или разность (для “вдогонку”) пройденных расстояний равна длине трека. Таким образом если скорости u и v , то $13(v+u)=2(v-u)$. Откуда $5v/3=7u/3$, то есть $v=7u/5$. А так как расстояние прямо пропорционально скорости, то когда быстрый проехал 100 кругов, медленный проехал $500/7$ кругов.

Решения (Вывод):

7. Петя и Вася решили создать новогоднее настроение и построить ёлку, как на чертеже. Они хотят заполнить каждый блок хвои ёлки целыми числами от 1 до 9 так, чтобы каждое число (кроме чисел в нижнем ряду) было равно сумме или разности двух чисел, стоящих непосредственно под ним. Если в двух блоках записаны одинаковые числа, то эти блоки окрашены одинаково. Некоторые блоки уже окрашены изначально, и их цвет нельзя изменить. Белые блоки считаются неокрашенными.



Ответ:

8. Трое детей получили каждый по натуральному числу, их произведение равно 5000. «Моё делится на 8» сказала Алина. «Моё делится на 50» сказал Гриша. «А моё делится на 125» сказала Саша. Оказалось, ошибся только один из них. Какое наибольшее число могло быть у Алины?

Ответ: 40.

Решение: а) 5000 делится на произведение чисел любых двоих из них. Разберем 3 случая, кто мог ошибиться.

1. Ошиблась Алина. Номер Гриши кратен 50, он равен $50k$. Номер Саши кратен 125, он равен $125m$. Произведение их номеров равно $6250km$. Но 5000 не делится на 6250.
 2. Ошибся Гриша. Такое возможно, например у Алины 8, у Гриши 5, у Саши 125.
 3. Ошиблась Саша. Тогда произведение номеров Алины и Гриши кратно $8 \cdot 50 = 400$, но 5000 не кратно 400.
- б) Пример. У Алины 40, у Гриши 1, у Саши 125. Оценка. Так как Саша не ошиблась, её число не меньше 125. Число Гриши не меньше 1. Поэтому число Алины не больше $5000 : 125 = 40$.

9. Можно ли представить число 2026 как сумму пяти натуральных чисел, в записи которых участвуют все десять цифр, в каждом из чисел цифры не повторяются, и в записи любых двух чисел нет одинаковых цифр?

Ответ: нет.

Решение: Сумма всех цифр от 0 до 9 равна 45. При делении на 9 (на 3) степень десятки 1, 10, 100, 1000, ... даёт остаток 1. Поэтому вклад цифры в сумму чисел по остатку при делении на 9 (на 3) совпадает с самой цифрой. Следовательно, остаток от деления суммы всех пяти чисел на 9 (на 3) равен остатку от деления суммы их цифр на 9 (на 3), то есть 45. А 45 делится на 9 (на 3) без остатка.

Теперь посмотрим на число 2026. Сложим его цифры: $2 + 0 + 2 + 6 = 10$. Значит, 2026 при делении на 9 (на 3) даёт остаток 1.

Получаем противоречие: сумма пяти чисел, составленных из всех десяти цифр без повторений, обязана делиться на 9 (на 3), а 2026 даёт остаток 1 при делении на 9 (на 3). Поэтому такое представление невозможно.

10. В ряд сидят несколько мальчиков и девочек. Каждый мальчик посчитал, сколько детей сидит между ним и ближайшим мальчиком и записал это число на доску. Среди записанных чисел есть 7 различных. Каково наименьшее количество детей?

Ответ: 29.

Решение:

Пример: ММ 0 ДМ 1 ДДМ 2 ДДДМ 3 ДДДДМ 4 ДДДДДМ 5 ДДДДДДМ 6

Оценка. Мальчики, между которыми минимальное названное число человек, дадут одинаковые ответы. Значит, мальчиков не менее 8. Упомянутые в ответе люди, сидящие между – это группы сидящих подряд девочек, для разных чисел эти группы различны. Сумма даже 7 наименьших различных чисел не менее $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, значит, и девочек не менее 21. Тем самым, всего в ряду не менее $8 + 21 = 29$ человек.