

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ИМЕНИ Г.П. КУКИНА

15.12.2019, 10-11 класс

г. Омск

*Математическая олимпиада ОмГУ носит имя профессора Г.П. Кукина, создателя системы городских математических олимпиад.*

1. В магазине "Всё из Китая" продаются Айфон 11 и Айфон 12. Сегодня, 15 декабря, Айфон 12 стоит на  $x\%$  дороже, чем Айфон 11. С 16 декабря решено удешевить все Айфоны на  $x\%$  от цены 15 декабря. 17 декабря на Айфон 11 будет еще одна скидка в  $x\%$  от цены 16 декабря, а на Айфон 12 цену также дополнительно уменьшат, но на  $x\%$  от цены 15 декабря: таким образом, 17 декабря оба Айфона будут стоить одинаково. Верно ли, что 17 декабря Айфон 11 будет стоить более чем на  $60\%$  дешевле, чем сегодня? (С.Усов)
2. В записи неоднозначного числа нет цифры 9. Докажите, что его можно представить как сумму двух слагаемых с одинаковыми суммами цифр. (А.Шаповалов)
3. В колонну выстроились 2019 учеников из школы рыцарей и из школы лжецов. Каждый, кроме первого, сказал либо «Человек передо мной – лжец», либо «Оба моих соседа - из одной школы». Известно, что последний в колонне сказал «Человек передо мной – лжец». Каково наименьшее и наибольшее возможное число рыцарей в колонне? (С.Усов)
4. Окружность  $C_1$  радиуса 3 и окружность  $C_2$  радиуса 9 касаются в точке  $B$ ,  $l$  – их общая касательная, касающаяся их в точках  $E$  и  $D$ . Окружность  $C_3$  проходит через точки  $B$ ,  $E$ ,  $D$ . Докажите, что треугольник, образованный точками  $B$ ,  $E$  и точкой пересечения  $l$  с касательной, проведенной в точке  $B$  к окружности  $C_3$ , – равнобедренный. (С.Усов)
5. В клетчатом прямоугольнике  $20 \times 19$  по границам клеток проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная. В каждую клетку вписали, сколько её сторон лежат на ломаной. Было вписано поровну чисел 0, 1, 2 и 3. Докажите, что  
а) есть звено ломаной, идущее по границе прямоугольника;  
б) общая длина таких звеньев не менее 2. (А.Шаповалов)
6. Найдите все натуральные числа, имеющие хотя бы два различных собственных делителя и кратные разности любых своих различных собственных делителей. (С.Усов)