Математическая олимпиада школьников имени Г.П. Кукина

18.12.2016, 9 класс

г. Омск

Математическая олимпиада ОмГУ носит имя профессора Г.П. Кукина, создателя системы городских математических олимпиад.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

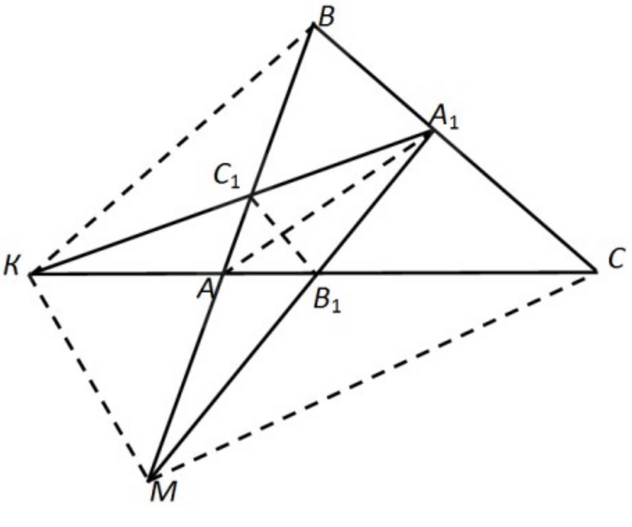
1. **Решение.** Да, смогут. Гребет первый. 9+1 туда, 1 обратно. 8+2 туда, 2 обратно. 7+3 туда, 3 обратно. 6+4 туда, 4 обратно. 4+3+2+1 туда, 1 обратно. 10 туда, 2 обратно. 5+1+2 туда.

2. **Ответ.** $100(2-\sqrt{2})$. **Решение.** Обозначим скорости Вани и Пети, соответственно за v и p. Тогда из условия задачи следует равенство: $100x/(x+y)=200y/(x+2y)$, что эквивалентно $x = y\sqrt{2}$. Искомое расстояние тогда равно $100\sqrt{2}/(1+\sqrt{2})=100(2-\sqrt{2})$.

3. **Ответ.** 1356, 1346, 1259, 1249. **Решение.** Поскольку произведение чисел двузначно (и цифры идут строго по возрастанию), то первая цифра может быть только 1, а вторая – 2 или 3. Во втором случае всего 5 вариантов: 1356, 1345, 1346, 1347, 1348. Варианты кода, между которыми сомневался дедушка, имели одинаковое произведение и одинаковую третью цифру, а значит вторая не могла совпадать. Значит, в одном варианте вторая цифра 2, а в другом 3. Выпишем всевозможные пары чисел с равным произведением цифр: 1348–1268, 1347–1267, 1345–1256, 1346–1249, 1356–1259. Третьи цифры совпадают только в двух последних парах.

4. **Решение.** Вершины делят окружность на дуги, измеряемые четным числом градусов. Поэтому угол между прямыми, содержащими диагонали, измеряется целым числом градусов. Всего есть 189 диагоналей. Снесем их в одну точку. Так как все углы с первой диагональю целые, и их не более 180, какие то из углов повторятся. Значит, соответствующие диагонали параллельны.

5. **Решение.** 1) Треугольники AKA_1 и BAA_1 с общим основанием AA_1 имеют равные площади, значит BK параллельно AA_1. Аналогично CM параллельно AA_1, а также KM параллельно C_1B_1. Осталось доказать, что параллельны прямые BC и C_1B_1.



2) Пусть расстояние от точки B_1 до прямой BC больше, чем расстояние от C_1 до прямой BC, тогда (из равенства площадей) $BA_1>A_1C$. Ясно также, что прямые BC и C_1B_1 пересекаются на продолжении отрезка C_1B_1 за точку C_1. Отсюда, учитывая параллельность прямых KM и C_1B_1, видим, что расстояние от точки K до прямой BC меньше расстояния от точки M до этой прямой. Но выполнено также неравенство $BA_1>A_1C$, поэтому площадь треугольника MA_1B больше площади треугольника KA_1C. В то же время из условия следует, что эти треугольники имеют равные площади. Противоречие. Аналогично невозможно, чтобы расстояние от точки B_1 до прямой BC меньше расстояния от C_1 до прямой BC. Получаем, что BC параллельна C_1B_1 (и точка A_1 – середина BC).

6. **Ответ.** $(2015\times2014)/2$. **Решение.** Воодушевляющая тройка однозначно задаётся парой чисел a, b. При этом в данной паре не может встречаться наименьшее число данного ряда. Поэтому для выбора первой пары воодушевляющей тройки имеется не более $(2015\times2014)/2$ возможностей. Чтобы эта возможность реализовалась, достаточно взять набор 0, 1, 2, …, 2015, в котором

содержатся все возможные остатки от деления на числа этого набора. Это означает, что любая пара дополняется до воодушевляющей тройки.