Математическая олимпиада школьников
имени Г.П. Кукина
20.12.15, 11 класс

Условия — см. www.ashap.info/Turniry/Kukin/index.html

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

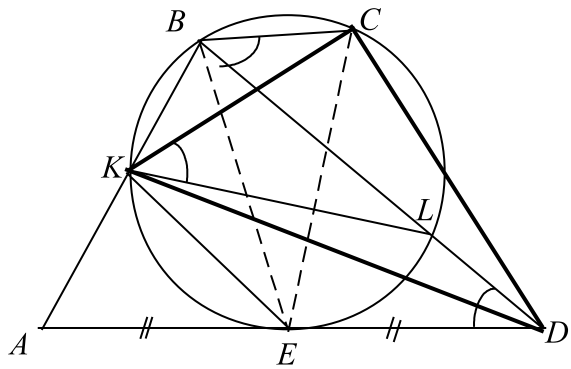
1. **Ответ.** Могут. **Решение.** Например, можно взять следующие числа: 0 и корни из дробей 2013·2014/2015, 2013·2015/2014, 2015·2014/2013.

2. **Ответ.** 45 и 24 либо 39 и 21. **Решение.** Пусть на большом колесе установлено x, а на малом – y кабинок. Большое колесо совершило за час два полных оборота, т.е. им воспользовалось $4 \cdot 2x$ человек. Малое колесо совершило два с половиной оборота. Если $y=2k$ (четное), то им воспользовалось $6 \cdot 5k$ человек. Таким образом, $4x=15k$, и x кратно 15, т.е. либо $x=30$, либо $x=45$. В первом случае $y=16$ (меньше 20), во втором $y=24$. Если $y=2k+1$ (нечетное), то малым колесом воспользовалось $6 \cdot (5k+2)$ человек. Теперь $4x=15k+6$. Перебираем k, кратные двум, но не кратные 4, так чтобы $15k$ было от 74 до 194. Их немного: 6 и 10. Но в первом случае y меньше 20. Значит, $x=39$ и $y=21$.

3. **Ответ.** У Васи. **Решение.** Обозначим тетраэдр $ABCD$, и пусть Петя сделает разрез по ребру AB. Тогда Вася режет по скрещивающемуся ребру CD, и после любого хода Пети тетраэдр уже можно развернуть в параллелограмм.

4. **Решение.** Заметим, что $a+b \geq 1$, тогда первая дробь не меньше чем $(a+b)/(a+b+c)$. Оценивая аналогично остальные дроби, получаем требуемое.

5. **Ответ.** 75°. **Решение.** Углы CBD и CKL равны, следовательно, $ABCD$ – трапеция. Так как E – середина AD, то $ABCD$ – равнобедренная трапеция. Треугольники ABE и KCE равны по первому признаку ($AB=CK$, $BE=CE$, и углы KBE и KCE опираются на одну дугу), тогда $AE=KE$. Имеем, что в треугольнике AKD медиана равна половине стороны, откуда $\angle AKD=90°$. Так как $KE=ED$ и $KC=CD$, то CE – это серединный перпендикуляр к KD, следовательно, CE – это биссектриса угла KCD, то есть $\angle KCE=\angle KEA=30°$ (вписанный угол и угол между касательной и хордой). Но тогда $\angle KDA=15°$ и $\angle BAD=75°$.



6. **Ответ.** 6. **Решение.** Оценка. Ясно, что число n людей в группе кратно 3. У троих назвавших одинакое число различны комбинации типа и четности

номера, поэтому среди них есть и маг, и полукровка, а также есть четный и нечетный номера. Так как не все в группе маги, никакой маг не может назвать число n-1. Поэтому число n-1 не называлось вообще, и значит, №1 – маг. Допустим, что n – нечетно. Тогда №n назвал 0. Значит, 0 должен назвать и кто-то и с четным номером. Но это невозможно, так как этот ученик обязан сосчитать мага №1. Противоречие.

Значит, n – четно. Так как №n – четный и не назвал n-1, то и №n – маг. Значит, №2 и №(n-1) оба назовут 1. Можно считать, что третий назвавший 1 имеет четный номер. Это – маг, так как четный полукровка с номером k>2 назовет больше 1. Так как маг №1 входит в подсчет, то №3 в подсчет не входит, то есть это – полукровка. Но тогда №3 назовет число n-3. Это же число обязан назвать какой-нибудь маг, поэтому общее число магов не менее n-2. Значит, полукровок не более 2, то есть названо не более 2 различных чисел. А значит, учеников не более 6.

Пример для n=6: №2 и №3 – полукровки, остальные маги. №2, №4 и №5 называют 1, остальные – 3.