

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
ИМЕНИ Г.П. КУКИНА

20.12.15 11 класс

г. Омск

*Математическая олимпиада ОмГУ носит имя профессора Г.П. Кукина,  
создателя системы городских математических олимпиад.*

1. Даны четыре числа. Их разбили на пары, сложили произведения пар и записали сумму. Разбивая на пары другими способами, записали ещё две суммы. Могут ли быть записаны числа 2013, 2014 и 2015?  
(Шановалов А.В.)
2. В парке культуры и отдыха два колеса обозрения, каждое имеет от 20 до 50 кабинок. Большое делает полный оборот за 30 минут, кабинки вмещают 4 человека. Малое делает полный оборот за 24 минуты, кабинки вмещают по 6 человек. Спустя час после начала работы парка оба колеса перевезли одинаковое число человек, причем все кабинки были заполнены, и никто не проехал больше одного круга. Сколько кабинок в каждом колесе обозрения? (Усов С.В.)
3. Имеется бумажный правильный тетраэдр. Петя и Вася по очереди делают разрезы лезвием бритвы вдоль рёбер тетраэдра, пока из тетраэдра не получится одна из возможных развёрток. Петя делает первый ход. Петя хочет, чтобы полученная развёртка имела форму треугольника, а Вася хочет, чтобы она имела форму параллелограмма. У кого из игроков имеется стратегия, позволяющая добиться своего? (Чернявская И.А.)
4. Числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  не меньше, чем 0,5. Докажите неравенство  
$$\frac{a+b}{1+c} + \frac{a+c}{1+b} + \frac{b+c}{1+a} \geq 2.$$
 (фольклор)
5. Через вершину  $B$  треугольника  $ABD$  проведена окружность, касающаяся стороны  $AD$  в ее середине  $E$ , и пересекающая стороны  $AB$  и  $BD$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. На дуге  $BL$ , не содержащей точку  $K$ , выбрана точка  $C$  так, что  $\angle CKL = \angle BDA$ . При этом треугольник  $KCD$  оказался равносторонним. Найдите угол  $BAD$ . (Зарубежные олимпиады)
6. Однажды в Хогвартсе (где учатся чистокровные маги и полукровки) группу учеников занумеровали по порядку и спросили всех нечётных: «У скольких магов номер больше твоего?», а всех чётных – «У скольких магов номер меньше твоего?». Все отвечают честно, только чистокровки полукровок за магов не считают. Каждое названное число было названо ровно 3 раза. Сколько человек в группе? (Усов С.В., Шановалов А.В.)