

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ИМЕНИ Г.П. КУКИНА**

20.12.15 10 класс

г. Омск

*Математическая олимпиада ОмГУ носит имя профессора Г.П. Кукина,
создателя системы городских математических олимпиад.*

1. Даны четыре числа. Их разбили на пары, сложили произведения пар и записали сумму. Разбивая на пары другими способами, записали ещё две суммы. Могут ли быть записаны числа 2013, 2014 и 2015? (*Шаповалов А.В.*)
2. Велосипедисты Петров и Волков проехали по одной и той же круговой дорожке по 22 круга каждый. Они начали ехать с одной скоростью, но Петров, проехав каждые три круга, снижает скорость в два раза, едет полкруга с этой скоростью, а потом возвращается к исходной скорости, снова проезжает три круга и т.д. А Волков делает то же самое каждые два круга. За сколько каждый из них преодолел всю дистанцию, если известно, что Петрову на это понадобилось на 10 минут меньше? (*Штерн А.С.*)
3. На сторонах AB , BC , CD и AD четырехугольника $ABCD$ соответственно выбраны точки K , L , M , N так, что $AK/KB=BL/LC=CM/MD=DN/NA$. На сторонах KL , LM , MN и NK соответственно выбраны точки P , Q , R , S так, что $KP/PL=LQ/QM=MR/RN=DS/SA$. Докажите, что площадь четырехугольника $PQRS$ не меньше четверти площади четырехугольника $ABCD$. (*Кукина Е.Г.*)
4. Однажды в Хогвартсе (где учатся чистокровные маги и полукровки) собрали 100 учеников, построили в ряд и спросили всех стоящих в ряду под нечётными номерами: «Сколько магов стоит справа от тебя?», а всех чётных – «Сколько магов стоит слева от тебя?». Каждый ответил честно, все ответы оказались различны, но чистокровные маги не считают полукровок магами. Были ли среди 100 учеников полукровки, и если были, на каких местах они стояли? (*Усов С.В.*)
5. Натуральное число называется элегантным, если у него больше одного простого делителя, и оно делится на сумму любых двух своих различных простых делителей. Найдите все четырёхзначные элегантные числа. (*Штерн А.С.*)
6. Через вершину B треугольника ABD проведена окружность, касающаяся стороны AD в ее середине E , и пересекающая стороны AB и BD в точках K и L соответственно. На дуге BL , не содержащей точку K , выбрана точка C так, что $\angle CKL=\angle BDA$. При этом треугольник KCD оказался равносторонним. Найдите угол BAD . (*Зарубежные олимпиады*)