Математическая олимпиада школьников
имени Г.П. Кукина
20.12.15, 9 класс

Условия — см. www.ashap.info/Turniry/Kukin/index.html

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

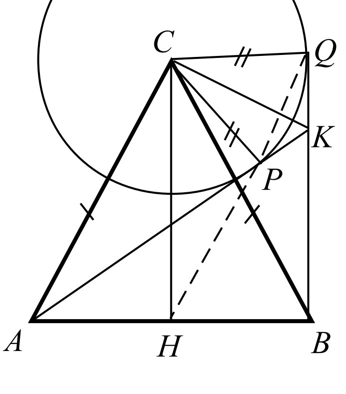
1. **Ответ.** Только нулю. **Решение.** Обозначим эти числа через x, y, z. Тогда имеем: $x^2=y^2+z^2$, $y^2=(x+z)^2$ $\Rightarrow$ складывая эти равенства, получаем $z(z+x)=0$. Но, если $z=0$, то $y=-x$, а, если $z+x=0$, то $y=0$. В любом случае сумма всех трёх слагаемых равна нулю.

2. **Ответ.** Например, 846415–346425=499990.
Комментарий. Прийти к этому примеру можно, например, так.
СОРОКА–ВОРОНА=(С–В-1)999(К+10–Н)0, если К<Н. Сумма цифр полученной разности равна С+К–В–Н+36. И достаточно соблюдения двух условий: К<Н и С+К–В–Н=4.

3. **Ответ.** $\sqrt{3}$. **Решение.** Легко видеть, что $\angle BDC=60°$, поэтому точка K лежит на отрезке AD. Тогда $\angle KMA=30°=\angle KAM$ $\Rightarrow$ $AK=KM=MD=KD$. В то же время $\angle BDM=180°-\angle KDM-\angle BDC=60°$. Поэтому треугольники BDC и BDM равны по стороне и двум углам, откуда $CD=MD$. Но тогда $\angle DCM=30°$, откуда $\angle KMC=90°$ и $MC=\sqrt{3}\,KM=\sqrt{3}\,AK$.

4. **Ответ**. Да, законопроект были принят. **Решение**. Оценим сверху количество проголосовавших против. Шипящие и согласные, на самом деле проголосовавшие таким образом, подтвердить этого не могли, поскольку в этой ситуации они обманывают. Поэтому среди тех и других, вместе взятых, против проголосовали не более 60 человек. Каждый гласный, проголосовавший против, это подтвердил. Поэтому среди них проголосовало таким образом не более 10 человек. А всего «против» проголосовало не более 70 человек. Тогда по условию кнопку «воздержаться» нажали не более 35 человек, а кнопку «за» – не менее 210–70–35=105. Это означает, что законопроект был принят.

5. **Решение.** Пусть прямая AP пересекает BQ в точке K. Соединим отрезками точки H и P, точки P и Q, а также C и K. Докажем, что $\angle APH=\angle QPK$, тем самым докажем, что точки H, P и Q лежат на одной прямой. Так как $AC=CB$, $CP=CQ$, то прямоугольные треугольники ACP и BCQ равны по гипотенузе и катету, а значит $\angle CAP=\angle CBQ$, т. е. около четырехугольника $CABK$ можно описать



окружность. Углы BAK и BCK равны как вписанные, опирающиеся на одну хорду. Так как $\angle AHC = \angle APC = 90°$, то около четырехугольника $AHPC$ можно описать окружность и углы PAH и HCP равны как вписанные, опирающиеся на одну хорду. Но тогда $\angle BCK = \angle HCP$, т.е. $\angle HCB = \angle PCK$, $\angle HCB = \angle ACH = \angle APH$, а $\angle PCK = \angle QCK = \angle QPK$, значит $\angle APH = \angle QPK$.

6. **Ответ**. $2520=2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$, $5040=2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7$, $7560=2^3\cdot3^3\cdot5\cdot7$. **Решение.** У нечётного числа сумма любых двух простых делителей чётна, поэтому нечётное число элегантным быть не может. Обозначим наименьший простой нечётный делитель через p. Если хотя бы одно из чисел $p+2$, $p+4$ составное, то у него есть нечётный делитель, меньший числа $(p+4)/2$, что меньше p при $p>3$. Тогда в силу выбора p либо $p=3$, либо каждое из чисел p, $p+2$, $p+4$ является простым. Но все эти числа дают различные остатки от деления на 3. Значит одно из них делится на 3 и не может быть простым при $p\neq3$. Получили, что в любом случае элегантное число делится на 2 и 3. Далее последовательно получаем, что оно делится на: 5, 7, 8, 9. Поэтому разложение элегантного числа на простые множители содержит $2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7=2520$. Очевидно также, что само число 2520 является элегантным и, умножая это число на любой простой множитель, входящий в его запись, мы снова получаем элегантное число. Но умножать можно только на 2 или 3, в противном случае число перестаёт быть четырёхзначным. А при умножении его на новое простое число (11 или больше), мы тем более не можем получить четырёхзначного числа. Поэтому никаких других простых делителей элегантное число содержать не может.