Математическая олимпиада школьников
имени Г.П. Кукина
20.12.15 8 класс

Условия — см. www.ashap.info/Turniry/Kukin/index.html

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. **Ответ.** 240 рублей. **Решение 1.** Пусть килограмм чернослива стоит x рублей, килограмм кураги y рублей, килограмм изюма z рублей. Тогда из условия следует $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=200, \frac{y}{2}+\frac{z}{2}=180 \Rightarrow y+z=360 \Rightarrow \frac{x}{3}=80 \Rightarrow x=240$. **Решение 2.** Два килограмма второй смеси стоят 360 руб и состоят из 1 кг кураги и 1 кг изюма. Три килограмма первой смеси стоят 600 руб и состоят из 1 кг изюма, 1 кг кураги и 1 кг чернослива. В трёх килограммах добавлен 1 кг чернослива, а цена увеличилась на 600-360=240 руб. Значит, это и есть стоимость килограмма чернослива.

2. **Решения.** Пронумеруем людей и пристани от 1 до 5 по часовой стрелке. Запись *i->j* означает, что человек №*i* плывет на пристань №*j*. **Первое решение.** Достаточно проплыть два раза против часовой стрелки по образованной диагоналями звёздочке. Первые 5 рейсов: 1->4, 4->2, 2->5, 5->3, 3->1. Каждый сдвинулся на 2 позиции против часовой стрелки, то есть на пристанях с 1-й по 5-ю находятся люди №№ 3, 4, 5, 1, 2 соответственно. Теперь каждый может плыть на нужную ему пристань, поскольку находящемуся там он готов передать лодку: 3->4, 1->2, 4->5, 2->3, 5->1. **Второе решение.** 1->4, 4->2, 2->5, 5->3, 3->4, 1->2, 4->5, 2->3, 5->1. Нетрудно убедиться, что каждый раз лодка передается человеку, с которым приплывший не был в ссоре.

3. **Ответ.** Нет, закон не был принят. **Решение.** Те из «гласных» или «шипящих», кто голосовал «за», врали, то есть ответили, что голосовали «против» или воздержались. В обеих партиях так ответили всего по 20 человек. Даже если все так ответившие проголосовали «за», то это не более 40 человек. Те из «согласных», кто голосовал «за», говорили правду, то есть ответили, что голосовали «за». В партии «Согласные» так ответили 30 человек. Даже если все так ответившие проголосовали «за», то это не более 30 человек. Значит, суммарно по трём партиям «за» проголосовало не более 70 человек. А 50% голосов — это 75 человек. Поэтому проект не прошёл.

4. **Решение.** Рассмотрим треугольники CHM и KMB. В них равны по две стороны и угол (правда, лежащий не между ними), причём треугольник CHM прямоугольный. Но треугольники с двумя равными сторонами и равным углом могут не быть равными только, если один из них тупоугольный, а другой остроугольный. Значит, треугольники CHM и KMB равны, $CH=BK$ и $\angle AKM=\angle CHM=90°$. Но тогда $\angle DKH=\angle DHK=$ $=90°-60°=30°$ $\Rightarrow$ $\angle KDH=120°$ $\Rightarrow$ $\angle DBC=\angle BCD=\angle ACD=30°$ $\Rightarrow$ ABC – прямоугольный треугольник с углом 30° $\Rightarrow$ $AC=BC/2=MC$ $\Rightarrow$ треугольники ACH и MCH равны по двум сторонам и углу между ними $\Rightarrow\angle AHC=90°$, что и требовалось.

5. **Решение**. Да, существуют. Рассмотрим, например, число A вида 11..15, где количество единиц больше 10. Умножая A на 2016, получаем 11…15×2016=10080+20160+201600+2016000+…+201600…0=2240….007840 (тут образуется много девяток ввиду 2+0+1+6=9, но они все исчезают за счет бегущего перехода через десяток). (Или так: 11…15×2016 = (11...11+4)×9×224 = (99..99+36)×224 = (100..00+35)×224 = 22400..00+ 35×224 = 22400...7840.) Сумма цифр произведения равна 27 независимо от количеств единиц в записи числа A. Чтобы сумма цифр числа A была в 2016 раз больше, в его записи должно быть 27×2016–5 единиц.

6. **Решение**. Пусть в наборе все числа различны, три наименьших числа – $a<b<c$. Рассмотрим любое из оставшихся чисел x и две тройки $\{a, c, x\}$, $\{b, c, x\}$. Обе суммы $a+c+x$ и $b+c+x$ не могут делиться на c одновременно, поскольку разность между второй и первой суммой положительна, но меньше c. Значит, хотя бы одна из этих сумм делится на x. Но $a+c<2x$ и $b+c<2x$, поэтому выполнено одно из равенств $a+c=x$ или $b+c=x$. Таким образом, мы доказали, что любое число, не входящее в первую тройку, равно сумме двух чисел из этой тройки. Но тогда различных чисел во всём наборе не более шести.