

Математическая олимпиада школьников имени Г.П. Кукина

16.12.12 • 11 класс

г. Омск

Математическая олимпиада ОмГУ носит имя профессора Г.П. Кукина, создателя системы городских математических олимпиад.

1. Расставьте в клетках квадрата 4×4 числа 0, 1, -1 так, чтобы все восемь сумм чисел по строчкам и столбцам были различными.
2. При любом значении аргумента x выполнено равенство $\cos(x + \alpha) + \cos(x + \beta) + \cos x = 0$. Найдите значения α и β , если $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$.
3. Одна из высот треугольника равна среднему арифметическому других высот. Докажите, что отношение любых двух сторон этого треугольника больше $2/5$.
4. У многоугольника 2012 вершин. Петя записал в вершины разные числа. На каждой стороне Вася выписал сумму чисел на её концах. Какое наименьшее количество различных чисел мог выписать Вася? (А.Шановалов)
5. Дед Мороз и Снегурочка упаковывают хлопушки в праздничные коробки. Коробка представляет собой четырехугольную пирамиду, все ребра которой равны. Дед Мороз ставит хлопушку в коробку, а Снегурочка укладывает хлопушку на дно коробки по диагонали, как показано на рисунке. Причем в обоих случаях хлопушка упакована плотно: не двигается внутри коробки. Найдите размеры хлопушки.
6. На доске написано число 1. Каждую минуту имеющееся на доске выражение либо умножается на переменную x , либо складывается с переменной x . Через 2012 минут на доске появился многочлен $f(x)$ степени 1000, график которого проходит через точку А с абсциссой 1. Какие значения может принимать ордината этой точки? Найдите все возможные варианты ответа и докажите, что других быть не может.

