

Математическая олимпиада школьников имени Г.П. Кукина

16.12.12 • 9 класс

г. Омск

Математическая олимпиада ОмГУ носит имя профессора Г.П. Кукина, создателя системы городских математических олимпиад.

1. Существуют ли два различных числа (не обязательно целых), у которых сумма равна произведению, а разность между большим и меньшим равна отношению большего к меньшему?
2. У многоугольника 10 вершин. Петя записал в вершины разные числа. Для каждой стороны Вася выписал сумму чисел на её концах. Могло ли оказаться так, что Вася выписал всего три различных числа? (*А.Шаповалов*)
3. На доске написано выражение $*x^2+*x+*=0$ и некоторое трёхзначное число. Ученик Петя раскладывает его произвольным образом в произведение трёх натуральных делителей и заменяет любым делителем одну из звёздочек. Затем Марья Ивановна расставляет два других делителя на два оставшихся места. Петя хочет, чтобы полученное квадратное уравнение имело ровно один корень. Какое число должно быть написано на доске, чтобы Пете удалось добиться желаемого независимо от хода Марьи Ивановны? Приведите все возможные варианты ответа и объясните, почему невозможны другие.
4. Из треугольника ABC вырезан треугольник KMN так, что отрезок KM лежит на одной стороне AB, а прямые KN и MN параллельны сторонам BC и AC соответственно. Периметр полученного шестиугольника на 20% больше периметра треугольника ABC. Если вырезать тот же самый треугольник, приложив сторону KN к стороне BC, то периметр шестиугольника будет на 30% больше периметра треугольника ABC. А если вырезать тот же треугольник, приложив сторону MN к стороне AC, то периметр шестиугольника будет на 40% больше периметра треугольника. На сколько процентов площадь полученного шестиугольника меньше площади исходного треугольника?
5. Внутри треугольника ABC выбрана точка P так, что $\angle PAC = \angle PBC$. Из точки P опущены перпендикуляры PM и PL на стороны AC и BC соответственно. Докажите, что середина стороны AB находится на равном расстоянии от точек M и L.
6. В стране лжецов и рыцарей десяти людям сообщили различные числа от 1 до 10. Потом каждого спросили: «Делится ли ваше число на 2?». Утвердительный ответ дали 3 человека. На вопрос «Делится ли ваше число на 4?» утвердительный ответ дали 6 человек. И на вопрос «Делится ли ваше число на 5?» утвердительно ответили 2 человека. Какие числа сообщили лжецам?