

Олимпиада им. Г.П.Кукина

11 класс. 2008-2009 уч. год

1. Какое наибольшее значение может принимать сумма косинусов всех углов равнобедренного треугольника? (фольклор)
2. Из пункта А в пункт В одновременно отправились два туриста. Первый турист прошёл весь путь со скоростью v , а второй поделил свой путь на семь равных участков и двигался с постоянной скоростью на каждом из участков. Известно, что его скорость на каждом участке, кроме первого, была больше скорости на предыдущем участке на одну и ту же величину, а на четвёртом участке он двигался со скоростью v . Кто пришёл в пункт В раньше?
3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1. Прямая l проходит через точку E , середину ребра $C_1 D_1$, и пересекает прямые AD_1 и $A_1 B$. Найдите расстояние от точки E до точки пересечения прямой l с прямой $A_1 B$.
4. Докажите, что при любом натуральном k существует бесконечно много чисел, которые можно представить как в виде суммы k последовательных натуральных чисел, так и в виде суммы $k+1$ последовательного натурального числа. (*Штерн А.С.*)
5. В марсианском домино на каждой половинке костяшки может быть от нуля до 2008 очков, а в остальном правила те же. Все костяшки, кроме дублей, выложены в ряд так, что на соприкасающихся половинках – одинаковое число очков. Таким образом, очки на полукостяшках образуют последовательность чисел. В памяти автомата «Доминатор» изначально содержится число 0. Автомат по очереди считывает числа последовательности и заменяет на каждом шаге число, содержащееся в его памяти, на модуль разности между этим числом и очередным членом последовательности. Какое число получит «Доминатор» в конце концов, если последовательность начиналась с числа 2007? (*Усов С.В.*)
6. В одной из клеток прямоугольника 2008×99 стоит число -1 , а в остальных клетках стоят единицы. За один ход разрешается заменить число -1 в одной из клеток на 0, а все числа в клетках, соседних с ней по стороне, умножить на -1 . Докажите, что, в какой бы клетке ни стояло изначально число -1 , действуя таким образом, можно сделать так, что вся таблица будет состоять из одних нулей.