Математическая олимпиада им. Г.П. Кукина; 11 класс

2007-08 уч.г.

Ответы и решения

1. Ответ: решений нет. Решение: уравнение легко приводится к виду $\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x^{2007}-x}=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x^{2007}-x}=-1$, что невозможно.
2. Ответ: 1. Решение. По теореме синусов треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, то есть их углы равны. Поэтому треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны, а, значит, равны и все последующие треугольники.
3. Пусть t – разность прогрессии, x – корень многочлена Тогда уравнение можно переписать в виде $ax^3+(a+t)x^2+(a+2t)x+(a+3t)=0 \quad \Leftrightarrow \quad a(x^2+1)(x+1)=-t(x^2+2x+3)$. По условию параметры a, t положительны и $x^2+2x+3>0$ при любом x. Поэтому $x+1<0$.
4. Будем нумеровать ступеньки снизу вверх. Вначале Сизиф должен пять раз поднять по 26 камней на ступеньку с номером 104. Затем – 5 раз спустить по 25 камней на ступеньку с номером 129. После этого нужно пять раз спустить оставшиеся 5 камней на ту же ступеньку с номером 129.
5. Ответ: первый. Решение. Докажем, что при правильной игре первого будет сделано ровно 2005 ходов, это и будет обозначать, что выиграет начинающий. Своим первым ходом он должен объединить вторую и третью слева кучки (после этого первая кучка уже не будет объединена никогда), а затем каждым ходом объединять кучку, вторую слева из оставшихся, со следующей. Докажем, что первый всегда сможет сделать этот ход. Предположим, что каждый уже сделал по k ходов. Тогда во второй слева кучке имеется не менее, чем k+1 орех, а в любой другой кучке не более, чем k+1 орех. Поэтому и (k+1)-й ход первый сделать сможет.
6. Решение. Т. к. по условию плоскости ABCD и KLMN параллельны, то остальные грани являются четырехугольниками, содержащими параллельные стороны: либо параллелограммами, либо трапециями. Т. к. сечением сферы любой плоскостью является окружность, указанные грани с параллельными сторонами являются либо параллелограммами, вписанными в окружность (т.е. прямоугольниками), либо равнобедренными трапециями. Рассмотрим оба случая.

1) Пусть KABL – прямоугольник, но тогда AB=KL. Из условия следует, что $\frac{AB}{KL}=\frac{BC}{LM}$. Тогда BC=LM, т.е. грань BCML также является прямоугольником. Отсюда следует, что ребро BL перпендикулярно двум пересекающимся прямым из плоскости (KLM), а значит перпендикулярно всей плоскости. Не зависимо от того, являются ли две другие боковые грани трапециями или прямоугольниками имеем, что AK=DN=CM=BL и равно расстоянию между параллельными плоскостями, т.е. каждое такое ребро перпендикулярно этим плоскостям, а значит ABCDKLMN – прямая призма.
2) Пусть KABL – равнобедренная трапеция и прямые AK и BL пересекаются в точке S, лежащей, например, на продолжении лучей KA и LB. Тогда треугольники SAB и SKL подобны с коэффициентом $\frac{AB}{KL}=k$. Т.к. $\frac{AB}{KL}=\frac{BC}{LM}$, то прямая CM пересекает прямую LB в точке S. Плоскости граней AKDN и DCMN пересекаются по прямой DN. Но эти же плоскости имеют общую точку S $\in AK, CM$. Тогда прямая DN также проходит через точку S, а значит шестигранник ABCDKLMN является усеченной пирамидой.