Математическая олимпиада им. Г.П. Кукина; 9 класс
2007-08 уч.г.

Ответы и решения

1. Ответ: 0. Решение После очевидных преобразований получаем равенство $xu+uy+u^2= xv+vy+v^2 \Leftrightarrow (x+y+ u+v)(u-v)=0$. Поскольку числа попарно различны, вторая скобка отлична от нуля. Значит, сумма всех четырёх чисел равна нулю.

2. Петя не прав, вот пример такой расстановки

1	1	1	1
1	1	1	5
1	2	5	5
2	2	2	5

3. Поскольку ВО одновременно является медианой и биссектрисой треугольника АВК, то АВК – равнобедренный и ВО – его высота. ∠САК =∠АВО=∠ОВС, поэтому треугольники АОL, АВО и ВАL подобны по трем углам, откуда АО/LО=АВ/АL. Но ВL – биссектриса треугольника АВС, а потому АВ/АL=ВС/СL. Итак, АО/ОL=ВС/СL.
4. Ответ: 10. Решение Из условия следует, что самый большой и самый маленький собственный делители имеют разную чётность. Если самый большой делитель чётный, то само число делится на 2, и, значит, самый маленький собственный делитель равен 2, то есть, тоже чётный. Значит, чётным будет наименьший делитель, но наименьший собственный делитель есть простое число, а единственное чётное простое число – это 2. Поэтому наименьший собственный делитель – это 2, наибольший – это 5, а само число равно произведению наименьшего и наибольшего, то есть 10.
5. Пусть ABCD – четырехугольник, и M – точка внутри него. Очевидно, что один из углов AMB, BMC, CMD, DMA обязан быть тупым (поскольку их сумма составляет 360 и не все из них прямые) – это, конечно, угол при вершине равнобедренного треугольника.
(*) Если правильный и равнобедренный треугольники – смежные, например, AMB и BMC соответственно, то AM=BM=CM и M – центр описанной окружности. Таким образом, AM=DM=CM, и прямоугольные треугольники CMD и DMA тоже равнобедренные, а потому равны.
(**) Если же правильный и равнобедренный треугольники лежат друг напротив друга, например – AMB и CMD, то восстановив серединные перпендикуляры к их основаниям AB и СД обнаружим что они (поскольку в равнобедренном треугольнике проведенные к основанию медиана и высота совпадают) либо пересекутся в точке M, либо совпадут. В первом случае M – снова центр описанной окружности. Следовательно, AM=BM=CM=DM, и прямоугольные треугольники BMC и DMA снова равны как равнобедренные. Если же серединные перпендикуляры совпали, то четырёхугольник ABCD – вписанная и потому равнобедренная трапеция. Поэтому прямоугольные треугольники BMC и DMA равны по трём сторонам.
6. Ответ: 9. Решение Пусть в школе $2x$ мальчиков и x девочек, а сумма всех оценок у мальчиков и девочек – А и В соответственно. Тогда по условию $\frac{A}{x}=\frac{A+B}{3x}+1 \Leftrightarrow 2A=B+3x \Leftrightarrow \frac{A}{x}=\frac{B}{2x}+1{,}5$. Последнее равенство означает, что средняя оценка за контрольную у девочек на 1,5 балла превышает среднюю оценку у мальчиков. По условию справедливы неравенства: $A\le 3+4+5(x-2)=5x-3$ и $B\ge 5+4+3(2x-2)=6x+3$. Отсюда получаем: $5-\frac{3}{x}\ge 4{,}5+\frac{3}{2x} \Leftrightarrow 9\le x$. Оценка получена, и из вычислений видно, как нужно строить пример.