

Математическая олимпиада им. Г.П. Кукина; 8 класс

2007-08 уч.г.

Ответы и решения

1. Ответ: нет, не существуют.

Решение. После очевидных преобразований получаем равенство $xv+uy=xu+vy \Leftrightarrow (x-y)(u-v)=0$. Значит, либо $x=y$, либо $u=v$.

2. Барон, как всегда, говорит правду. Будем действовать следующим образом. Возьмём первый слева вертикальный столбик и будем убирать королей в следующем порядке: 1-й сверху, 3-й, 5-й, 7-й, 2-й, 4-й, 6-й. Аналогично освобождаем все столбики со 2-го по 6-й. В 7-м столбике убираем всех королей подряд сверху вниз.

3. Ответ: $BE:EC=2$.

Решение. Из условия ясно, что точка С лежит между точками Е и К. Отрезок FC есть средняя линия в треугольнике DEK, поэтому $EC=CK$. Аналогично EF есть средняя линия в треугольнике BDK, поэтому $BE=EK$. Отсюда $BE=2EC$.

4. Ответ: пятый кандидат рыцарь, а остальные лжецы.

Решение. Пусть кандидат с номером 1 рыцарь. Тогда правду говорит кандидат с номером 9, а значит и кандидаты с номерами 3 и 7. Получается, что среди кандидатов четыре рыцаря. То же самое получается, если рыцарь – один из кандидатов с номерами 3, 7 и 9. Аналогично, если рыцарем будет один из кандидатов с номерами 2, 4, 6, 8, то и остальные кандидаты из этой команды будут рыцарями. Значит, все эти кандидаты – лжецы, а единственный рыцарь кандидат №5.

5. Ответ: 6.

Решение. Из условия следует, что самый большой и самый маленький собственный делители имеют разную чётность. Если самый большой делитель чётный, то само число делится на 2, и, значит, самый маленький собственный делитель равен 2, то есть, тоже чётный. Значит, чётным будет наименьший делитель, но наименьший собственный делитель есть простое число, а единственное чётное простое число – это 2. Поэтому наименьший собственный делитель – это 2, наибольший – это 3, а само число равно произведению наименьшего и наибольшего, то есть 10.

6. Ответ: 2.

Решение. Обозначим первое число через x , а второе через y . Тогда дальше на доске выписаны следующие числа: $x, y, y-x, -x, -y, x-y, x, y, \dots$. Отсюда видно, что числа на доске повторяются через 6, и сумма в каждой такой шестёрке равна нулю. Число 100 при делении на 6 даёт остаток 4, а число 200 – остаток 2. Отсюда получаем равенства $2y-x=0, y+x=3$ и $y=1, x=2$. Так как число 2007 при делении на 6 даёт в остатке 3, искомая сумма равна $2y=2$.