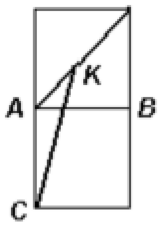
V Европейский математический турнир
г. Ярославль, 14–19 марта 2022 года

Тур 2. 7-8 класс. Первая лига. 17 марта

1. На олимпийские игры приехали спортсмены из трёх стран. Мужчин и женщин на играх было поровну. Каждый участник пожал руку всем участникам из других стран (участники из одной страны друг другу руки не жали). При этом оказалось, что количество рукопожатий между спортсменами одного пола отличается от количества рукопожатий между спортсменами разного пола не более чем на 1. Докажите, что из какой-то страны на игры приехало поровну мужчин и женщин.

2. В стопку сложены 150 игральных карт: 50 дам, 50 королей и 50 тузов. Для каждой дамы подсчитано количество королей, лежащих ниже её, для каждого короля – количество тузов, лежащих ниже его, а для каждого туза – количество дам, лежащих ниже его. Найдите наибольшее возможное значение суммы 150 получившихся чисел.

3. Два квадрата на рисунке имеют общую сторону *AB*. На диагонали одного из них взяли точку *K*, расстояние от которой до вершины *C* другого квадрата равно его диагонали. Найдите угол *ACK*.



4. Серёжа, стерев несколько цифр в числе 123456789, обнаружил, что оставшиеся цифры образуют число, не делящееся на 9, и, более того, какие бы цифры ещё ни стирать, получающееся число делиться на 9 не будет. Определите наименьшее возможное количество цифр, стёртых Серёжей.

5. В клетках прямоугольной таблицы расставлены натуральные числа. Для фиксированного числа n Дима может производить следующие операции: домножить все числа в какой-нибудь строке на n или вычесть n из всех чисел какого-нибудь столбца. Найдите все n, для которых Дима сможет из любой таблицы получить таблицу с одними нулями.

6. На столе лежат 100 карточек, на которых написаны числа 1,2, ... , 100, на каждой по одному числу. Пете и Васе раздали по 50 карточек каждому. Мальчики играют в игру, начинает Петя. За ход игрок выкладывает на стол одну из своих карточек. Игрок выигрывает, если после его хода сумма чисел на всех карточках на столе делится на 101. Можно ли раздать карточки игрокам так, чтобы Петя мог победить, как бы ни играл Вася?

7. В каждой вершине куба сидела муха. В какой-то момент некоторые мухи перелетели на другие вершины куба так, что в каждой вершине куба снова оказалось по одной мухе. Докажите, что для каких-то трёх мух треугольник с вершинами в их начальном положении равен треугольнику с вершинами в их конечном положении.

8. В турнире по настольному теннису участвовали 10 мальчиков и 6 девочек. Каждый участник сыграл с каждым по одному разу и одержал хотя бы одну победу. По итогам турнира оказалось, что все мальчики одержали разное количество побед, а все девочки "--- одинаковое. Докажите, что единоличным победителем турнира стал мальчик. За победу даётся 1 очко, за поражение – 0 очков, ничьих в теннисе не бывает.

Авторы задач: Д.Белов – 8, С.Токарев – 4.

http://www.ashap.info/Turniry/EMT/index.html