V Европейский математический турнир
г. Ярославль, 14–19 марта 2022 года

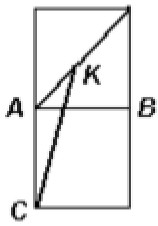
Тур 2. 7-8 класс. Гранд-лига. 17 марта

1. На олимпийские игры приехали спортсмены из нескольких стран. Каждый участник пожал руку всем участникам из других стран (участники из одной страны друг другу руки не жали). При этом оказалось, что количество рукопожатий между спортсменами одного пола отличается от количества рукопожатий между спортсменами разного пола не более чем на 1. Как ни странно, число мужчин и женщин среди участников различается тоже не больше чем на 1. Какое наибольшее количество стран могло отправить на игры нечётное число спортсменов?

2. На бесконечной клетчатой решётке 2022 клетки покрашены в чёрный цвет, остальные – в белый. Каждую минуту клетки перекрашиваются по следующему правилу. Клетка красится в чёрный цвет, если в трёхклеточном уголке, образованном этой клеткой и клетками справа и сверху от неё, не менее двух чёрных клеток. Иначе клетка красится в белый цвет. Докажите, что не более чем через 2022 минуты все клетки станут белыми.

3. В стопку сложены 150 игральных карт: 50 дам, 50 королей и 50 тузов. Для каждой дамы подсчитано количество королей, лежащих ниже её, для каждого короля – количество тузов, лежащих ниже его, а для каждого туза – количество дам, лежащих ниже его. Найдите наибольшее возможное значение суммы 150 получившихся чисел.

4. Два квадрата на рисунке имеют общую сторону *AB*. На диагонали одного из них взяли точку *K*, расстояние от которой до вершины *C* другого квадрата равно его диагонали. Найдите угол *ACK*.



5. В клетках прямоугольной таблицы расставлены натуральные числа. Для фиксированного числа n Дима может производить следующие операции: домножить все числа в какой-нибудь строке на n или вычесть n из всех чисел какого-нибудь столбца. Найдите все n, для которых Дима сможет из любой таблицы получить таблицу с одними нулями.

6. Найдите все такие натуральные m и n, для которых число $3^m + 7^n$ является точным квадратом.

7. В каждой вершине куба сидела муха. В какой-то момент некоторые мухи перелетели на другие вершины куба так, что в каждой вершине куба снова оказалось по одной мухе. Докажите, что для каких-то трёх мух треугольник с вершинами в их начальном положении равен треугольнику с вершинами в их конечном положении.

8. В турнире по настольному теннису участвовали 10 мальчиков и 6 девочек. Каждый участник сыграл с каждым по одному разу и одержал хотя бы одну победу. По итогам турнира оказалось, что все мальчики одержали разное количество побед, а все девочки – одинаковое. Докажите, что единоличным победителем турнира стал мальчик. За победу даётся 1 очко, за поражение – 0 очков, ничьих в теннисе не бывает.

Авторы задач: Д.Белов – 8.

http://www.ashap.info/Turniry/EMT/index.html