

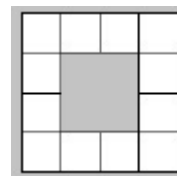
V Европейский математический турнир г. Ярославль, 14–19 марта 2022 года



Тур 1. 7-8 класс. Первая лига. 16 марта

1. На окружности отмечено 17 точек, каждая из которых покрашена в один из трёх цветов. Оказалось, что каждые две соседние точки покрашены в разные цвета. Докажите, что можно провести несколько отрезков с вершинами в отмеченных точках так, чтобы они не пересекались по внутренним точкам и образовывали хотя бы два разноцветных треугольника. (Треугольник называется *разноцветным*, если его вершины покрашены в три различных цвета.)

2. В клетках таблицы 6×6 записаны числа. За один вопрос можно узнать сумму чисел в любом квадрате, содержащем ровно одну угловую клетку. Как за несколько вопросов узнать сумму чисел в какой-нибудь рамке из 12 клеток (см. рис.)?



3. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AB и BC взяты точки M и N соответственно так, что $AM=CB$ и $CN=MB$. Найдите острый угол между отрезками AN и CM .

4. Петя и Вася по очереди записывают натуральные числа от 1 до 25 в клетки таблицы 5×5 , начинает Петя. Каждое число может быть записано только один раз. Если после заполнения всей таблицы сумма чисел в каком-нибудь столбце или в какой-нибудь строке равна 70, то выигрывает Петя, в противном случае Вася. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

5. На доске выписаны дроби $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n}{n-1}$. В некоторых из них учитель

поменял местами числитель и знаменатель (например, дробь $\frac{3}{2}$ могла превратиться в $\frac{2}{3}$). Оказалось, что произведение получившихся дробей равно 1. Чему могло быть равно n ?

6. На прямой отмечена $2k+1$ точка так, что расстояние между каждыми двумя точками целое. Известно, что для каждой отмеченной точки сумма расстояний до остальных $2k$ точек чётная. Докажите, что расстояние между любыми двумя отмеченными точками чётное.

7. В наборе 22 гири массами 1 г, 2 г, ..., 22 г. Отличить на вид, какая гиря весит больше, невозможно. Дима про каждую гирю знает её массу, а Руслан знает только, что массы гирь именно такие, но не знает, какая сколько весит. Дима хочет доказать Руслану, что выбранная им гиря весит 1 г. Сможет ли он это сделать за два взвешивания на чашечных весах, если никаких других гирь у него нет?

8. Игорь может производить с натуральным числом следующие операции: 1) прибавить наибольший собственный делитель; 2) разделить на наименьший простой делитель; 3) вычесть наибольший простой делитель. С нулём никакие операции производить нельзя. Сможет ли Игорь из числа 2019 получить число 2021? (Делитель числа называется собственным, если он не равен 1 и самому числу.)

Авторы задач: И.Почепцов – 8, И.Сиротовский – 2, А.Шаповалов – 2.

<http://www.ashap.info/Turniry/EMT/index.html>