

**V Европейский математический турнир
г. Ярославль, 14–19 марта 2022 года**



Тур 1. 7-8 класс. Гранд-лига. 16 марта

1. Можно ли отметить на плоскости 3^{100} точек так, чтобы для каждой из них существовало не менее 200 отмеченных точек, расстояние до которых от данной точки составляло бы ровно 1 метр?
2. В однокруговом волейбольном турнире участвовали k команд. Оказалось, что если для каких-то двух команд A и B команда A победила команду B , то найдётся команда C , проигравшая B , но победившая A . При каких k возможен такой турнир?
3. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b таких, что a^2+3b^2 делится на $a+3b$.
4. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AB и BC взяты точки M и N соответственно так, что $AM=CB$ и $CN=MB$. Найдите острый угол между отрезками AN и CM .
5. Петя и Вася по очереди записывают натуральные числа от 1 до 25 в клетки таблицы 5×5 , начинает Петя. Каждое число может быть записано только один раз. Если после заполнения всей таблицы сумма чисел в каком-нибудь столбце или в какой-нибудь строке равна 70, то выигрывает Петя, в противном случае Вася. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?
6. На доске выписаны дроби $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n}{n-1}$. В некоторых из них учитель поменял местами числитель и знаменатель (например, дробь $\frac{3}{2}$ могла превратиться в $\frac{2}{3}$). Оказалось, что произведение получившихся дробей равно 1. Чему могло быть равно n ?
7. На прямой отмечена $2k+1$ точка так, что расстояние между каждыми двумя точками целое. Известно, что для каждой отмеченной точки сумма расстояний до остальных $2k$ точек чётная. Докажите, что расстояние между любыми двумя отмеченными точками чётное.
8. В наборе 30 гирь массами 1 г, 2 г, ..., 30 г. Отличить на вид, какая гиря весит больше, невозможно. Дима про каждую гирю знает её массу, а Руслан знает только, что массы гирь именно такие, но не знает, какая сколько весит. Дима хочет доказать Руслану, что выбранная им гиря весит 1 г. Сможет ли он это сделать за два взвешивания на чашечных весах, если никаких других гирь у него нет?

<http://www.ashap.info/Turniry/EMT/index.html>