IV Европейский математический турнир
г. Тверь, 15-20 марта 2021 года

Тур 4. Сеньоры. Гранд-лига. Верхние бои

20 марта

1. Некоторые клетки квадрата 100x100 покрашены в один из n цветов так, чтобы покрашенные клетки не имели общих точек. При каком наименьшем n данную раскраску можно гарантированно дополнить до правильной? Раскраска называется правильной, если каждая покрашена в один из данных n цветов и соседние по стороне клетки покрашены в разные цвета.

2. На столе лежат гирьки веса 1, 2, ..., 100 г. Петя делит их на пары, а затем Вася раскладывает их все на чашечные весы так, чтобы гирьки из одной пары всегда попадали на разные чаши. Вася хочет, чтобы разность весов на чашах стала как можно меньше, а Петя – как можно больше. Найдите разность при наилучшей игре сторон.

3. Числа a, b, c≥3. Докажите, что 3(abc+b+2c) ≥2(ab+2ac+3bc).

4. Назовём натуральное число $n=p^aq^b\dots r^c$ (здесь p, q, …, r – различные простые числа) *несложным*, если сумма всех показателей $a+b+\dots+c<11$. Существует ли 2021 подряд идущих чисел, среди которых ровно 1729 несложных?

5. В квадрате ABCD точка M – середина BC. Точка L на стороне CD такова, что AM биссектриса угла BAL. Точка S на AD такова, что ∠LMS=45°. Докажите, что отрезок MS делится отрезком AL пополам.

6. Найдите все натуральные n, для которых существует простое p такое, что $p^n-(p-1)^n$ является степенью числа 3.

7. Дана последовательность натуральных чисел $a_1<a_2<\dots<a_n$. Известно, что сумма квадратов любых двух соседних членов равна удвоенному квадрату. Найдите наименьшее возможное значение a_n.

8. У учителя было 2^k яблок и два школьника. Одно яблоко он съел, а все остальные раздал школьникам. Школьники не видят, сколько яблок получил их товарищ и не знают, сколько яблок было изначально. Цель школьников – узнать, кому досталось больше яблок. Для этого они заранее договариваются о системе оповещения: моргнуть правым глазом или моргнуть левым глазом. Знаки они подают одновременно и только один раз, и после этого каждый должен верно сказать, у кого яблок больше. Могут ли школьники добиться желаемого?

Авторские задачи: 1 – Д.Белов, Р.Ефремов, 2 – А.Шаповалов

http://www.ashap.info/Turniry/EMT/index.html

IV Европейский математический турнир
г. Тверь, 15-20 марта 2021 года

Тур 4. Сеньоры. Гранд-лига, нижние бои; Первая лига, верхний бой.

20 марта

1. Некоторые клетки квадрата 100х 100 покрашены в один из n цветов так, чтобы покрашенные клетки не имели общих точек. При каком наименьшем n данную раскраску можно гарантированно дополнить до правильной? Раскраска называется правильной, если каждая покрашена в один из данных n цветов и соседние по стороне клетки покрашены в разные цвета.

2. Гриша сделал 8 одинаковых игральных кубиков, грани которых пронумерованы тоже одинаково от 1 до 6. Из них он сложил куб 2x2x2 так, чтобы на каждой паре прилегающих граней двух кубиков сумма была простым числом. Какова наименьшая возможная сумма чисел на поверхности куба?

3. На столе лежат гирьки веса 1, 2, ..., 100 г. Петя делит их на пары, а затем Вася раскладывает их все на чашечные весы так, чтобы гирьки из одной пары всегда попадали на разные чаши. Вася хочет, чтобы разность весов на чашах стала как можно меньше, а Петя – как можно больше. Найдите разность при наилучшей игре сторон.

4. Назовём натуральное число $n=p^a q^b \dots r^c$ (здесь p, q, …, r – различные простые числа) *несложным*, если сумма всех показателей $a+b+\dots+c<11$. Существует ли 2021 подряд идущих чисел, среди которых ровно 1729 несложных?

5. В треугольник вписан квадрат так, что на одной стороне треугольника оказались две вершины квадрата, на двух других – по одной. Оказалось, что центр квадрата и точка пересечения медиан треугольника совпали. Найдите углы треугольника.

6. На прямой провод уселись 38 попугаев. Каждый верно сосчитал и назвал вслух сумму расстояний от него до остальных попугаев (в метрах). Могли ли быть названы в некотором порядке 38 последовательных натуральных чисел?

7. У учителя было 2^k яблок и два школьника. Одно яблоко он съел, а все остальные раздал школьникам. Школьники не видят, сколько яблок получил их товарищ и не знают, сколько яблок было изначально. Цель школьников – узнать, кому досталось больше яблок. Для этого они заранее договариваются о системе оповещения: моргнуть правым глазом или моргнуть левым глазом. Знаки они подают одновременно и только один раз, и после этого каждый должен верно сказать, у кого яблок больше. Могут ли школьники добиться желаемого?

8. Дан остроугольный треугольник, для сторон a, b и c которого выполняется равенство

$$\frac{c^2-a^2}{b}+\frac{b^2-c^2}{a}=b-a.$$

Докажите, что длины его биссектрис также можно подставить в это равенство вместо a, b и c так, чтобы оно осталось верным.

Авторские задачи: 2, 3 – А.Шаповалов

http://www.ashap.info/Turniry/EMT/index.html

IV Европейский математический турнир
г. Тверь, 15-20 марта 2021 года

Тур 4. Сеньоры. Первая лига. Нижний бой.

20 марта

1. Некоторые клетки доски 100х 100 покрашены в красный цвет так, что у покрашенных клеток нет общих точек. Докажите, что остальные клетки можно покрасить в три другие цвета так, чтобы никакие две одноцветные клетки не граничили по стороне.

2. Гриша сделал 8 одинаковых игральных кубиков, грани которых пронумерованы тоже одинаково от 1 до 6. Из них он сложил куб 2х2х2 так, чтобы на каждой паре прилегающих граней двух кубиков сумма была простым числом. Какова наименьшая возможная сумма чисел на поверхности куба?

3. По кругу встали 12 жителей острова лжецов и рыцарей. Каждый заявил: ``Ровно один из моих соседей – лжец''. Затем они встали в круг в другом порядке. Более половины из них заявили: ``Оба моих соседа – лжецы''. Сколько из них ответят ``Да'' на вопрос ``Верно ли, что оба твоих соседа – рыцари?'' Лжецы всегда лгут, а рыцари говорят правду.

4. В равнобедренном треугольнике ABC (AB = AC) на сторонах AC и BC выбраны точки N и M соответственно так, что $\angle BAM = \angle MNC$. Луч MN пересекает прямую AB в точке P. Докажите, что биссектрисы углов BAM и BPM пересекаются в точке, лежащей на отрезке BC

5. На конкурсе обжор 6 обжор съели огромный торт. Их спросили, сколько они съели. Ответы были: половина торта, четверть торта, 1/5 торта, 1/6 торта, 1/20 торта и 1/60 торта. Выяснилось, что некоторые прихвастнули, завысив свой результат вдвое. Кто из них прихвастнул?

6. У натурального числа нашли остатки при делении на 3, 30 и 300. Оказалось, что сумма этих остатков равна 99. Найдите остаток при делении этого числа на 3.

7. В турнире по волейболу десять команд сыграли каждая с каждой по одному разу. Команды, разделившие первые три места, одержали поровну побед; команды, разделившие три последних места, также одержали поровну побед, а остальные одержали разное число побед (ничьих в волейболе не бывает). Сколько побед одержала команда, занявшая 5-е место?

8. На прямой провод уселись 38 попугаев. Каждый верно сосчитал и назвал вслух сумму расстояний от него до остальных попугаев (в метрах). Могли ли быть названы в некотором порядке 38 последовательных натуральных чисел?

Авторские задачи: 2, 3, 5 – А.Шаповалов

http://www.ashap.info/Turniry/EMT/index.html