# **IV Европейский математический турнир г. Тверь, 15-20 марта 2021 года**

# **Тур 4. Сеньоры. Гранд-лига. Верхние бои** *20 марта*

**1.** Некоторые клетки квадрата 100x100 покрашены в один из n цветов так, чтобы покрашенные клетки не имели общих точек. При каком наименьшем n данную раскраску можно гарантированно дополнить до правильной? Раскраска называется правильной, если каждая покрашена в один из данных n цветов и соседние по стороне клетки покрашены в разные цвета.

**2.** На столе лежат гирьки веса 1, 2, ..., 100 г. Петя делит их на пары, а затем Вася раскладывает их все на чашечные весы так, чтобы гирьки из одной пары всегда попадали на разные чаши. Вася хочет, чтобы разность весов на чашах стала как можно меньше, а Петя – как можно больше. Найдите разность при наилучшей игре сторон.

**3.** Числа a, b, c≥3. Докажите, что 3(abc+b+2c) ≥2(ab+2ac+3bc).

**4.** Назовём натуральное число *n=paqb... rc* (здесь *p*, *q*, …, *r* – различные простые числа) *несложным*, если сумма всех показателей *a+b+…+c*<11. Существует ли 2021 подряд идущих чисел, среди которых ровно 1729 несложных?

**5.** В квадрате ABCD точка M – середина BC. Точка L на стороне CD такова, что AM биссектриса угла BAL. Точка S на AD такова, что ∠LMS=45°. Докажите, что отрезок MS делится отрезком AL пополам.

**6.** Найдите все натуральные n, для которых существует простое p такое, что pn-(p-1)n является степенью числа 3.

**7.** Дана последовательность натуральных чисел *a1<a2<...<an*. Известно, что сумма квадратов любых двух соседних членов равна удвоенному квадрату. Найдите наименьшее возможное значение *an*.

**8.** У учителя было 2k яблок и два школьника. Одно яблоко он съел, а все остальные раздал школьникам. Школьники не видят, сколько яблок получил их товарищ и не знают, сколько яблок было изначально. Цель школьников – узнать, кому досталось больше яблок. Для этого они заранее договариваются о системе оповещения: моргнуть правым глазом или моргнуть левым глазом. Знаки они подают одновременно и только один раз, и после этого каждый должен верно сказать, у кого яблок больше. Могут ли школьники добиться желаемого?

*Авторские задачи*: 1 – Д.Белов, Р.Ефремов, 2 – А.Шаповалов

<http://www.ashap.info/Turniry/EMT/index.html>

# **IV Европейский математический турнир г. Тверь, 15-20 марта 2021 года**

# **Тур 4. Сеньоры. Гранд-лига, нижние бои; Первая лига, верхний бой.** *20 марта*

**1.** Некоторые клетки квадрата 100x 100 покрашены в один из n цветов так, чтобы покрашенные клетки не имели общих точек. При каком наименьшем n данную раскраску можно гарантированно дополнить до правильной? Раскраска называется правильной, если каждая покрашена в один из данных n цветов и соседние по стороне клетки покрашены в разные цвета.

**2.** Гриша сделал 8 одинаковых игральных кубиков, грани которых пронумерованы тоже одинаково от 1 до 6. Из них он сложил куб 2x2x2 так, чтобы на каждой паре прилегающих граней двух кубиков сумма была простым числом. Какова наименьшая возможная сумма чисел на поверхности куба?

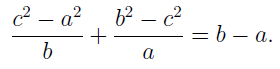
**3.** На столе лежат гирьки веса 1, 2, ..., 100 г. Петя делит их на пары, а затем Вася раскладывает их все на чашечные весы так, чтобы гирьки из одной пары всегда попадали на разные чаши. Вася хочет, чтобы разность весов на чашах стала как можно меньше, а Петя – как можно больше. Найдите разность при наилучшей игре сторон.

**4.** Назовём натуральное число *n=paqb... rc* (здесь *p*, *q*, …, *r* – различные простые числа) *несложным*, если сумма всех показателей *a+b+…+c*<11. Существует ли 2021 подряд идущих чисел, среди которых ровно 1729 несложных?

**5.** В треугольник вписан квадрат так, что на одной стороне треугольника оказались две вершины квадрата, на двух других – по одной. Оказалось, что центр квадрата и точка пересечения медиан треугольника совпали. Найдите углы треугольника.

**6.** На прямой провод уселись 38 попугаев. Каждый верно сосчитал и назвал вслух сумму расстояний от него до остальных попугаев (в метрах). Могли ли быть названы в некотором порядке 38 последовательных натуральных чисел?

**7.** У учителя было 2*k* яблок и два школьника. Одно яблоко он съел, а все остальные раздал школьникам. Школьники не видят, сколько яблок получил их товарищ и не знают, сколько яблок было изначально. Цель школьников – узнать, кому досталось больше яблок. Для этого они заранее договариваются о системе оповещения: моргнуть правым глазом или моргнуть левым глазом. Знаки они подают одновременно и только один раз, и после этого каждый должен верно сказать, у кого яблок больше. Могут ли школьники добиться желаемого?

**8.** Дан остроугольный треугольник, для сторон *a*, *b* и *c* которого выполняется равенство

Докажите, что длины его биссектрис также можно подставить в это равенство вместо *a*, *b* и *c* так, чтобы оно осталось верным.

*Авторские задачи*: 2, 3 – А.Шаповалов

<http://www.ashap.info/Turniry/EMT/index.html>

# **IV Европейский математический турнир г. Тверь, 15-20 марта 2021 года**

# **Тур 4. Сеньоры. Первая лига. Нижний бой.** *20 марта*

**1.** Некоторые клетки доски 100x 100 покрашены в красный цвет так, что у покрашенных клеток нет общих точек. Докажите, что остальные клетки можно покрасить в три другие цвета так, чтобы никакие две одноцветные клетки не граничили по стороне.

**2.** Гриша сделал 8 одинаковых игральных кубиков, грани которых пронумерованы тоже одинаково от 1 до 6. Из них он сложил куб 2x2x2 так, чтобы на каждой паре прилегающих граней двух кубиков сумма была простым числом. Какова наименьшая возможная сумма чисел на поверхности куба?

**3.** По кругу встали 12 жителей острова лжецов и рыцарей. Каждый заявил: ``Ровно один из моих соседей – лжец''. Затем они встали в круг в другом порядке. Более половины из них заявили: ``Оба моих соседа – лжецы''. Сколько из них ответят ``Да'' на вопрос ``Верно ли, что оба твоих соседа – рыцари?'' Лжецы всегда лгут, а рыцари говорят правду.

**4.** В равнобедренном треугольнике ABC (AB = AC) на сторонах AC и BC выбраны точки N и M соответственно так, что ∠BAM = ∠MNC. Луч MN пересекает прямую AB в точке P. Докажите, что биссектрисы углов BAM и BPM пересекаются в точке, лежащей на отрезке BC

**5.** На конкурсе обжор 6 обжор съели огромный торт. Их спросили, сколько они съели. Ответы были: половина торта, четверть торта, 1/5 торта, 1/6 торта, 1/20 торта и 1/60 торта. Выяснилось, что некоторые прихвастнули, завысив свой результат вдвое. Кто из них прихвастнул?

**6.** У натурального числа нашли остатки при делении на 3, 30 и 300. Оказалось, что сумма этих остатков равна 99. Найдите остаток при делении этого числа на 3.

**7.** В турнире по волейболу десять команд сыграли каждая с каждой по одному разу. Команды, разделившие первые три места, одержали поровну побед; команды, разделившие три последних места, также одержали поровну побед, а остальные одержали разное число побед (ничьих в волейболе не бывает). Сколько побед одержала команда, занявшая 5-е место?

**8.** На прямой провод уселись 38 попугаев. Каждый верно сосчитал и назвал вслух сумму расстояний от него до остальных попугаев (в метрах). Могли ли быть названы в некотором порядке 38 последовательных натуральных чисел?

*Авторские задачи*: 2, 3, 5 – А.Шаповалов

<http://www.ashap.info/Turniry/EMT/index.html>