IV Европейский математический турнир
г. Тверь, 15-20 марта 2021 года

Тур 2. Сеньоры. Гранд-лига

18 марта

1. Будем называться делитель d числа n *близким*, если $n<d^2<4n$. Существует ли натуральное число n, у которого есть ровно 2021 близких делителей?

2. Пусть a_1, a_2, ..., a_{2021} – последовательность натуральных чисел, для которой выполнено $a_{n+5}+a_n>a_{n+2}+a_{n+3}$ для всех n=1, 2,…, 2016. Докажите, что разность между какими-то членами последовательности больше 85000.

3. Куском ткани в виде многоугольника обернули без наложений и щелей кубическую посылку со стороной 1 дм. Там, где края ткани соприкоснулись, сделали шов. Оказалось, что все узлы (точки, откуда шов идёт более чем в двух направлениях) пришлись на вершины куба. Найдите наименьший возможный периметр многоугольника.

4. К левому берегу реки подошли 6 белых и 6 чёрных магов. Каждый маг имеет силу больше 0, все 12 сил различны, суммы сил белых и черных магов равны. Белые маги не согласны быть в лодке или на берегу вместе с чёрными, если там сумма сил чёрных больше чем у белых. Могло ли распределение сил позволить им всем с помощью трехместной лодки переправиться на правый берег?

5. Докажите, что положительное число a рационально тогда и только тогда, когда среди чисел a, a+1, ..., a+n, ..., найдутся 4 числа, которые можно разбить на две пары с одинаковым произведением.

6. Сапсан и Ласточка курсируют по железной дороге между Москвой и Тверью. Каждый из поездов едет с постоянной скоростью, причем скорость Сапсана на четверть выше скорости Ласточки. Приехав в какой-то из этих городов, каждый поезд стоит ровно 15 минут, а затем едет обратно. В 8:00 Сапсан вышел из Москвы, а Ласточка – из Твери. В 13:00 впервые они оба оказались одновременно в Твери. Сколько времени тратит Сапсан на то, чтобы проехать из одного города в другой?

7. Дана трапеция ABCD (AD||BC). На сторонах AB и AD выбраны точки E и K соответственно. Известно, что CK перпендикулярно AD, $\angle DCE = \angle ABC$ и AB + 2AK = AD + BC. Докажите, что BE = BC.

8. На окружности отмечены 2021 точки, раскрашенные в k цветов. Известно, что для каждой отмеченной точки P и для каждого цвета c существует дуга окружности, содержащая данную точку P, в которой не менее половины точек раскрашены в цвет c. Найдите наибольшее возможное значение k.

Авторские задачи: 5 – Р.Ефремов, 3 – А.Шаповалов

http://www.ashap.info/Turniry/EMT/index.html

IV Европейский математический турнир
г. Тверь, 15-20 марта 2021 года

Тур 2. Сеньоры. Первая лига

18 марта

1. Куском ткани в виде многоугольника обернули без наложений и щелей кубическую посылку со стороной 1 дм. Там, где края ткани соприкоснулись, сделали шов. Оказалось, что все узлы (точки, откуда шов идёт более чем в двух направлениях) пришлись на вершины куба. Найдите наименьший возможный периметр многоугольника.

2. По кругу лежат 2022 пустых карточки. Петя и Вася по очереди вписывают в карточки цифры, начинает Петя. На очередном ходу можно вписать число в любую пустую карточку. После того, как все карточки заполнены, Петя, начиная с некоторого места, разбивает карточки на трехзначные числа (читая по часовой стрелке). Числа могут начинаться с 0. Затем мальчики считают сумму S всех полученных чисел. Если эта сумма кратна 999, то побеждает Вася, иначе побеждает Петя. Кто выигрывает при правильной игре?

3. К левому берегу реки подошли 20 белых магов, один силы 2, каждый из остальных силы 1, и точно такая же по силам группа из 20 чёрных магов. Белые маги не согласны быть в лодке или на берегу вместе с чёрными, если там сумма сил чёрных больше чем у белых. Как им всем с помощью трёхместной лодки переправиться на правый берег?

4. Костя представил простое число p как сумму четырёх натуральных слагаемых: $p = a+b+c+d$ и выписал на доску шесть попарных сумм $a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, c+d$. Известно, что одно из чисел на доске делится на 2, другое – на 3, третье – на 4, четвёртое – на 10. Может ли ещё одно из выписанных чисел делиться на 100?

5. Сколькими способами из клетчатого квадрата 6x6 можно вырезать шестиугольник с границами по сторонам клеток? Равные фигуры в разных местах считаются разными способами.

6. По дороге без остановок с постоянной скоростью едет машина с неограниченным запасом топлива. Через каждые 15 километров стоят светофоры, которые горят красным светом только последние 6 минут каждого часа, а остальное время зелёным. Оказалось, что машина проехала без остановок 10 часов, то есть на каждом светофоре машина проезжала на зелёный свет. Какое наибольшее количество километров могла проехать машина за это время?

7. В квадрате ABCD из вершины A проведены два луча, делящие угол на три равные части. Один луч пересекает диагональ BD в точке N, второй пересекает продолжение BC в точке M. Через точку B провели прямую, перпендикулярную BD и пересекающую прямую MN в точке K. Найдите $\angle$KAC.

8. В компании из 51 человека каждый – рыцарь или лжец. Когда у всех спросили, со сколькими лжецами среди присутствующих вы знакомы, все ответы оказались различны. Какое наибольшее количество рыцарей может быть в этой компании?

Авторские задачи: 2 – С.Лучинин, 1, 3, 5 – А.Шаповалов

http://www.ashap.info/Turniry/EMT/index.html