IV Европейский математический турнир
г. Тверь, 15-20 марта 2021 года

Тур 1. Сеньоры. Гранд-лига

17 марта

1. У Васи есть несколько (больше одной) доминошек, каждая клетка которых окрашена в один из трех цветов. Оказалось, что Вася может использовав все доминошки сложить из них прямоугольник с трехцветной диагональной раскраской. Докажите, что Вася может сложить прямоугольник с другими длинами сторон, соблюдая те же условия.

2. На доске написаны два различных натуральных числа: n и k. Паша и Вова делают ходы по очереди, начинает Паша. За один ход необходимо стереть одно из чисел и записать вместо него меньшее натуральное число, которое ещё не появлялось на доске. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каких n и k при правильной игре побеждает Паша?

3. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 1000. Филипп выбрал одно из этих чисел и переписал в тетрадку все числа, которые делят выбранное или делятся на выбранное. Оказалось, что чисел, больших 500, в тетради 4 штуки, а меньших 500 – всего 6 штук. Какое число мог выбрать Филипп?

4. Обозначим через T_n количество способов выбрать нескольких из n человек и поставить их в шеренгу. Способы различны, если шеренги разные. Докажите, что T_n - T_m делится на n-m

5. Дан равнобедренный треугольник PQR с углом при вершине Q, равным 108°. Точка O расположена внутри треугольника PQR так, что $\angle ORP=30°$, а $\angle OPR=24°$. Найдите величину угла $\angle QOR$.

6. Многоугольник называется *равносторонним*, если все его стороны равны (например, правильный треугольник и ромб – равносторонние). Можно ли разрезать квадрат на три равносторонних многоугольника (не обязательно одинаковых)?

7. По кругу расставлены натуральные числа от 1 до n в некотором порядке. Для каждой пары соседних чисел посчитали модуль их разности, а затем сложили все эти числа. Найдите наибольшее возможное значение этой суммы.

8. В какое наименьшее количество цветов можно раскрасить натуральные числа от 1 до n так, чтобы никакие два различных числа одного цвета не давали в произведении точный квадрат?

Авторские задачи: 1 – Р.Ефремов, 4, 8 – С.Лучинин, 6 – А.Шаповалов

http://www.ashap.info/Turniry/EMT/index.html

IV Европейский математический турнир
г. Тверь, 15-20 марта 2021 года

Тур 1. Сеньоры. Первая лига

18 марта

1. Вася сложил из доминошек прямоугольник 21x100 и раскрасил его диагонально в три цвета. В результате каждая доминошка раскрасилась в два цвета. Докажите, что из этих доминошек Вася может составить прямоугольник 35x60, диагонально раскрашенный в три цвета. (Диагональная трёхцветная раскраска означает, что каждая диагональ одного из направлений одноцветна, и если она не одноклеточная, то граничит с двумя диагоналями двух других цветов).

2. Выписаны числа 1, 2, 3, …, 2021. Можно ли из них выбрать такое число N, чтобы среди остальных у него было ровно 10 делителей и ровно 10 кратных (само число мы ни там, ни тут не считаем)?

3. Натуральные числа a, b и c таковы, что a^2+b^2 делится на c^2, a^2+c^2 делится на b^2 и b^2+c^2 делится на a^2. Верно ли, что все числа равны?

4. Дан выпуклый четырехугольник ABCD. Его стороны AB и CD продлили за точки B и D на свои длины, получив точки P и R. Стороны BC и DA продлили за точки C и A на удвоенные длины, получив точки Q и S. Прямые PQ и RS пересекают прямую AC в точках X и Y. Найдите отношение XY:AC.

5. По кругу расставлены натуральные числа от 1 до 100 в некотором порядке. Для каждой пары соседних чисел посчитали модуль их разности, а затем сложили все эти числа. Найдите наибольшее возможное значение этой суммы.

6. Компьютер напечатал на ленту числа 1, 2, 3, ..., 999 в некотором порядке подряд без пробелов, каждое по одному разу. Получилось строка из цифр. Какое наибольшее количество раз на этой ленте может быть напечатана одинаковая комбинация из трёх подряд идущих цифр?

7. Ковбои Ивэн и Одд выпустили в мишень по 20 пуль, каждый раз выбивая очки: Ивэн чётное, а Одд – нечётное число. Ивэн попал в десятку, восьмёрку, шестёрку, четвёрку и двойку столько раз, сколько Одд в семёрку, пятёрку, тройку, единицу и девятку соответственно. В сумме они выбили поровну очков. Сколько девяток выбил Одд?

8. В ряд стоят 11 одинаковых шкатулок с одинаковыми монетами, в самой левой 11 монет, в каждой следующей на одну монету больше, чем в предыдущей. Шутник переложил из некоторой шкатулки Ш одну монету в шкатулку слева через одну. Как найти Ш за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

Авторские задачи: 4, 6 – Д.Белов, 3 – С.Лучинин, 1, 7 – А.Шаповалов

http://www.ashap.info/Turniry/EMT/index.html