IV Европейский математический турнир
г. Тверь, 15-20 марта 2021 года

Командная олимпиада. Сеньоры. Гранд-лига

16 марта

1. Петя, Вася и Толя поехали на велосипедах с дачи на озеро. Каждый из них едет со своей постоянной скоростью, стартуют они одновременно. Когда Петя проехал треть расстояния, Вася проехал только четверть расстояния. Когда Вася проехал треть расстояния, Толе оставалось проехать четверть расстояния. Какую часть расстояния проехал Петя в тот момент, когда Толя проехал треть расстояния?

2. Числа a, b, c (не обязательно целые) таковы, что $3a + 4b = 4c$ и $4a - 3b = 3c$. Докажите, что $a^2 + b^2 = c^2$.

3. На клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 1, обведены несколько клетчатых фигур. Для каждой фигуры посчитаны её площадь и периметр. Все получившиеся числа оказались различны. Может ли так случиться, что, выписав их по возрастанию, мы получим ряд последовательных чисел, начиная с 1?

4. На доске выписаны $n > 1$ различных натуральных чисел. Оказалось, что для любых различных чисел на доске a, b верно, что $(a+1)^2$ кратно b. Чему может быть равно n?

5. На стороне CD трапеции $ABCD$ ($AD||BC$) отмечена точка P. Оказалось, что AP и BP – биссектрисы углов A и B соответственно. Пусть $BC = m$, а $AD = n$. Найдите AB.

6. Петя и Вася играют на доске 9x9. В каждой клетке доски находится несколько фишек. В первой строке количество фишек (слева направо) равно $1^2, 2^2, ..., 9^2$, во второй строке – $10^2, 11^2, ..., 18^2$слева направо и т.\,д, в последней строке – $73^2, 74^2, ..., 81^2$. За один ход каждый мальчик выбирает клетчатый прямоугольник, одна из сторон которого равна 1, в каждой клетке которого стоит хотя бы одна фишка, и берёт из каждой клетки этого прямоугольника по одной фишке.

7. Дано число $0 < u < 1$. Определим последовательность: $u_1 = 1+u$, $u_2 = 1/u_1 + u$, $u_3 = 1/u_2 + u$, ..., $u_n = 1/u_{n-1} + u$. Докажите, что $u_n > 1$.

8. 2n+1 волейбольных команд разыграли турнир в один круг, причём каждая команда одержала ровно n побед. Сколько в этом турнире может быть троек команд, которые во встречах между собой имеют по одной победе? Как известно, в волейболе ничьих не бывает.

Авторские задачи: 1, 2, 5 – Р.Ефремов, 4 – С.Лучинин, 3 – А.Шаповалов
Решаемость задач (решений у 12 команд): 1)12; 2)11; 3)10; 4)7; 5)12; 6)5; 7)7; 8)5.

http://www.ashap.info/Turniry/EMT/index.html