

Тур 4. Лига сеньоров. 7 марта

1. В ряд записаны 10 различных натуральных чисел. Начиная со второго каждое равно сумме цифр предыдущего. Могут ли все числа быть точными квадратами?

А.В. Шаповалов

2. Дана доска $(2n + 1) \times (2n + 1)$, $n \geq 1$, на которой стоит k фишек, никакие две не стоят в одной клетке. Петя каждую минуту передвигает все фишки в соседние клетки так, что очередным ходом каждая фишка поворачивает на 90° . Для какого наименьшего k можно гарантировано утверждать, что в течение первых 100 минут какие-то две фишки попадут в одну клетку?

3. Двое играют в игру на доске 8×8 . Каждый по очереди ставит цифры в свободные клетки таблицы. По окончании игры считается сумма шестнадцати восьмизначных номеров (могут начинаться с нуля), получившихся в строках (слева направо) и в столбцах (сверху вниз). Второй выигрывает, если полученная сумма делится на 73, иначе выигрывает первый. Кто выигрывает при правильной игре?

4. На стороне BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B нашлась такая точка K , что $2(AB + BK) = KC$ и $\angle AKB = 60^\circ$. Найдите углы треугольника ABC .

5. Пусть S — множество всех делителей числа $12!$, кроме 1. Непустое подмножество U множества S называется *хорошим*, если выполняются три условия:

- Если $a \in U$, то любой кратный ему элемент S тоже лежит в U .
- Наибольший общий делитель любых чисел из U сам лежит в U .
- Наименьшее общее кратное двух чисел, не лежащих в U , само не лежит в U .

Сколько существует хороших множеств?

6. На плоскости дана замкнутая несамопересекающаяся ломанная, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой. Назовём пару несоседних звеньев *особенной*, если продолжение одного из них пересекает другое. Докажите, что число особенных пар чётно.

7. Найдите все простые числа x, y, z такие, что $x^2 + y^3 = z^4$.

8. В клетчатом прямоугольнике 20×19 по границам клеток проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная. В каждую клетку вписали, сколько её сторон лежат на ломаной. Было вписано поровну чисел 0, 1, 2 и 3. Докажите, что не менее двух единичных отрезков ломаной идут по границе прямоугольника.

А.В. Шаповалов