

## Тур 3. Лига сеньоров. 6 марта

1. Верно ли, что для каждого рационального  $q$  такого, что  $0,2 < q < 2$ , найдется такое число  $n$ , что при умножении  $n$  на 2 его сумма цифр увеличивается в  $q$  раз?

*Р.С. Ефремов*

2. В каждую клетку таблицы  $60 \times 60$  поставили по целому числу и вычислили 60 произведений чисел по строкам и 60 произведений чисел по столбцам. Все 120 произведений оказались различными. Какое наибольшее количество чисел в клетках может быть равным 1?

3. Фигура “герцог” может ходить на одну клетку вверх, или на одну клетку вправо, или на одну клетку по диагонали влево вниз. Может ли “герцог”, начиная из левого нижнего угла доски  $8 \times 8$  клеток, обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно по одному разу?

4. Пираты Дима и Руслан захватили 101 изумруд и выложили их по кругу. Оказалось, что вес каждого изумруда не менее 1 грамма и отличается меньше, чем на полграмма либо от суммы, либо от разности весов соседей. Докажите, что один из изумрудов можно отложить, а остальные раздать пиратам по 50 штук так, чтобы суммарные веса отличались меньше чем на 1 грамм.

*А.В. Шаповалов по мотивам Уральского турнира и турнира им. Савина*

5. Дан квадрат  $ABCD$  со стороной  $AB = 1$ . На сторонах  $AB$  и  $AD$  отметили точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $\angle ABN + \angle MCN + \angle MDA = 90^\circ$ . Докажите, что периметр треугольника  $AMN$  меньше 2.

*Р.С. Ефремов*

6. Последовательность чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  удовлетворяет следующим условиям:  $a_1 = 0$ ,  $|a_2| \leq |a_1 + 1|$ ,  $|a_3| \leq |a_2 + 1|$ ,  $\dots$ ,  $|a_n| \leq |a_{n-1} + 1|$ . Докажите, что  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq -\frac{1}{2}$ .

7. На плоскости нарисована решетка из правильных шестиугольников со стороной 1. Шмель, двигаясь по линиям решетки, прополз из узла  $A$  в узел  $B$  по кратчайшему пути. Длина этого пути оказалась равна 2020. Докажите, что половину пути он прополз в одном направлении.

8. Найдите все пары натуральных чисел  $x$  и  $y$  таких, что  $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$ .