

## Тур 1. Лига сеньоров. 3 марта

1. Миллион представлен как сумма двух натуральных слагаемых, каждое из которых делится на сумму цифр другого. Докажите, что слагаемые чётны.

*А.В. Шаповалов*

2. Найдите все простые  $p$  и  $q$  такие, что верно  $q^3 - q^2 = p^3 + 3p^2 - 2$ .

*С.А. Лучинин*

3. Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . Обозначим через  $\ell$  серединный перпендикуляр к  $AC$ . Прямая, параллельная  $BC$  и проходящая через точку  $A$ , пересекает  $\ell$  в точке  $X$ , а прямая, параллельная  $AB$  и проходящая через точку  $C$ , пересекает  $\ell$  в точке  $Y$ . Оказалось, что  $AX$  делит  $BY$  пополам. Докажите, что высота треугольника  $ABC$ , проведенная из вершины  $B$ , делит  $AU$  пополам.

*Д.А. Белов*

4. В какое минимальное число цветов достаточно покрасить клетки доски  $n \times 3n$  так, чтобы любые две клетки, связанные ходом ферзя, были разного цвета? Напомним, что ферзь ходит на любое число клеток по вертикали, горизонтали и диагонали.

*Д.А. Белов*

5. Три аула на одной горе лежат на разной высоте и попарно соединены дорогами длин 6, 8 и 10 км. Каждая дорога идёт вся вверх или вся вниз. Стартовав одновременно из одного аула, двое братьев на одинаковых мопедах делают полный круг в противоположных направлениях, двигаясь с одинаковой постоянной скоростью вверх и со вдвое большей скоростью — вниз. Первый брат потратил на круг ровно час, и более 20 минут ждал второго. С какой скоростью мопеды ехали вниз?

*А.В. Шаповалов*

6. 20 одинаковых с виду алмазов разложены поровну на чаши весов, так, что весы в равновесии. Известно, однако, что среди алмазов есть камни ровно двух разных весов, причем алмазов того и другого веса не поровну. За одну операцию можно поменять местами любые две группы из одинакового числа алмазов. Как нарушить равновесие, сделав не более 4 обменов?

*А.В. Шаповалов*

7. В мешке лежат конфеты четырех видов: шоколадные, карамельки, ириски и леденцы. Известно, что если вынуть любые 60 конфет из мешка, то среди вынутых видов обязательно найдутся два таких, конфет которых вынуто не поровну. Какое наибольшее число конфет может быть в мешке?

*А.В. Шаповалов*

8. У Пети и Васи есть по квадрату  $7 \times 7$ . Каждым ходом Петя вырезает из своего квадрата клетчатый прямоугольник и отдает его Васе. Вася сразу же размещает его на своем квадрате (без наложений с ранее размещенными прямоугольниками). Петя видит, как размещает Вася полученные фигуры, а Вася не видит, как вырезает фигуры Петя. Цель Васи — разместить все вырезанные Петей фигуры. Цель Пети — помешать Васе. Есть ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого?

*Р.С. Ефремов*