

Senior Grand league. Математический бой № 3

5 марта

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle B = 50^\circ$, $\angle A = 80^\circ$. На продолжении стороны AB за точку A отложили отрезок CD и получили точку K . Оказалось, что $KD \perp BC$. Найдите угол между AC и биссектрисой угла B .

2. В стране 2019 городов. Между любыми двумя городам летает либо авиакомпания “Воздушный флот”, либо “Беда” (но не обе одновременно), либо вообще ничего не летает. Для любой четверки городов выполнены три условия:

- 1) суммарное количество рейсов между городами четно;
- 2) между какими-то двумя городами обязательно летает “Воздушный флот”;
- 3) если между какими-то городами летает “Беда”, то количество рейсов этой компании между этими 4 городами не меньше числа рейсов компании “Воздушный флот”.

Какое наибольшее число городов можно гарантированно выбрать в этой стране так, чтобы между любыми двумя выбранными городами летал “Воздушный флот”?

3. Существуют ли такие 101 натуральное число, не обязательно все различные, произведение которых равно сумме всех их попарных наименьших общих кратных?

4. Дано простое число $p > 2$. Найдите все натуральные значения n , для которых числа $1, 2, 3, \dots, n-1, n$ можно разбить на p непересекающихся групп с равной суммой.

5. Имеется n положительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n . Петя написал на доске n дробей $\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}, \frac{x_2-x_3}{x_2+x_3}, \dots, \frac{x_{n-1}-x_n}{x_{n-1}+x_n}, \frac{x_n-x_1}{x_n+x_1}$, а Вася записал в тетрадку все возможные произведения нечётного количества из выписанных Петей дробей. Докажите, что сумма всех чисел в Васиной тетрадке равна нулю.

6. Пару различных девятизначных чисел m и n назовём *удивительной*, если m и n отличаются только перестановкой цифр, ни одна из цифр не появляется в n дважды и n делится на m . Докажите, что каждое число в удивительной паре содержит цифру 8. Напоминаем, что число не может начинаться с нуля.

7. В ряд стоят 50 спортсменов, все разного роста и разного возраста. Ровно 20 из них старше соседа справа. Ровно 19 из них выше соседа слева. Докажите, что есть спортсмен, который и выше, и старше своего соседа справа.

8. Пятеро умных детей сидят за круглым столом. Учитель громко сказал: «Я дал несколько яблок некоторым из вас так, что количество яблок у всех разное. Кому-то яблок могло не достаться. Всего я раздал k яблок.» Также он тихо сообщил каждому ребенку, сколько яблок у его соседей слева и справа. Каждый ребенок кроме этого знает количество яблок у него самого и очень хочет угадать, какова разница между количествами яблок двух детей, сидящих напротив. Дети называют числа одновременно, заранее ни о чем не договариваясь. При каком максимальном k хотя бы одному ребенку в любом случае удастся угадать разницу?

Junior Grand league. Математический бой № 3

5 марта

1. В ряд стоят 50 спортсменов, все разного роста и разного возраста. Ровно 20 из них старше соседа справа. Ровно 19 из них выше соседа слева. Докажите, что есть спортсмен, который и выше, и старше своего соседа справа.

2. Существуют ли такое 101 натуральное число (не обязательно все числа различны), произведение которых равно сумме всех их попарных наименьших общих кратных?

3. Дано натуральное число n . Отметим на числовой прямой все точки, соответствующие дробям со знаменателями, не превосходящими n . Какое наибольшее число отмеченных точек можно накрыть открытым (не содержащим свои концы) интервалом длины $1/n$?

4. Дед Мороз катается на коньках по ледяному кольцу, двигаясь с постоянной скоростью. Одновременно из той же точки стартует Снегурочка, она движется в 6,5 раз медленнее Деда. Когда Дед удаляется от Снегурочки (то есть, расстояние между ними растёт), она льёт слёзы, а когда приближается, то не льёт. Какое наименьшее количество целых кругов надо будет проехать Деду Морозу, чтобы к этому моменту Снегурочка залила слезами всё ледяное кольцо?

5. На доске $n \times n$ стоит шахматный король. Для каких натуральных $n \geq 2$ можно обойти всю доску королём (побывав в каждой клетке ровно один раз), начиная с некоторой клетки, если его диагональные и недиагональные ходы должны чередоваться и первый ход должен быть диагональным?

6. На плоскости отмечена точка A . Какое наименьшее число попарно непересекающихся отрезков можно провести с таким условием, чтобы любой луч, выходящий из точки A , пересекал не менее 7 проведённых отрезков?

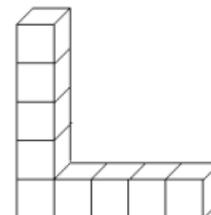
7. Пятеро умных детей сидят за круглым столом. Учитель громко сказал: «Я дал несколько яблок некоторым из вас так, что количество яблок у всех разное. Всего я раздал k яблок.» Также он тихо сообщил каждому ребенку, сколько яблок у его соседей слева и справа. Каждый ребенок кроме этого знает количество яблок у него самого и очень хочет угадать, какова разница между количествами яблок двух детей, сидящих напротив. Дети называют числа одновременно, заранее ни о чем не договариваясь. Определите максимальное k , при котором в любом случае хотя бы одному ребёнку удастся угадать разницу.

8. Пару различных девятизначных чисел m и n назовём *удивительной*, если m и n отличаются только перестановкой цифр, ни одна из цифр не появляется в n дважды и n делится на m . Докажите, что каждое число в удивительной паре содержит цифру 8. Напоминаем, что число не может начинаться с нуля.

The International league. Математический бой № 3

5 марта

1. Из 9 одинаковых кубиков склеена фигурка (см. рис). Можно ли её поверхность без щелей и наложений оклеить тремя бумажными прямоугольниками? (Прямоугольники можно перегибать через рёбра; прямоугольники могут быть не одинаковы.)



2. Алекс отметил на прямой точку, разбив эту прямую на два луча. Из этой точки Алекс провел ещё два луча по одну сторону прямой так, что они образовали между собой угол 50° . Для каждой пары из четырёх лучей Алекс измерил угол между ними. Кроме угла 180° получилось ещё пять разных углов. Алекс сложил наибольший из тупых углов с наибольшим из острых, получив в сумме 200° . Найдите величину наибольшего из острых углов (в градусах).

3. В ряд стоят 50 спортсменов, все разного роста и разного возраста. Ровно 20 из них старше соседа справа. Ровно 19 из них выше соседа слева. Докажите, что есть спортсмен, который и выше, и старше своего соседа справа.

4. В некотором царстве будут использоваться монеты только в целое число динаров. Царь постановил, что любую сумму не больше 20 динаров можно будет набрать не более, чем тремя монетами. Какое наименьшее число достоинств монет может быть в этом царстве?

5. Дед Мороз делает 12 витков по ледяному кольцу, двигаясь с постоянной скоростью. Одновременно из той же точки стартует Снегурочка, она движется в 3 раза медленнее Деда. Когда Дед удаляется от Снегурочки (то есть, расстояние между ними растёт), она льёт слёзы, а когда приближается, то не льёт. Какая часть длины кольца будет полита слезами? (Расстояние между Дедом и Снегурочкой считается по кольцу).

6. На столе лежат 33 карточки с цифрами лицом вниз. Известно, что среди них есть карточка с цифрой 5. Школьник открывает карточки по одной. Открыв, он должен приписать перед цифрой знак $+$ или $-$. Как ему действовать, чтобы сумма всех так полученных 33 чисел наверняка не делилась на 6?

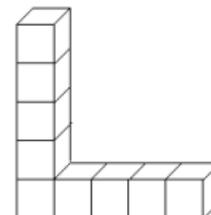
7. Из чисел от 1 до 1000 выкинули те, у которых все цифры делятся на 3, а остальные записали в порядке возрастания и поставили перед ними знаки « $-$ » и « $+$ », строго чередуя: $-1 + 2 - 4 + 5 - 7 + 8 - 10 + 11 - 12 + 13 - \dots$. Найдите сумму всех так полученных чисел.

8. За круглым столом сидят 10 учеников. Каждый из них задумал число и сообщил его двум своим соседям. После этого каждый ученик сказал вслух сумму чисел, которые ему сообщили. Оказалось, что произнесённые учениками числа в порядке обхода круга: 2, 4, 6, \dots , 20. Какое число задумал школьник, сказавший число 12?

The International league. Математический бой № 3

5 марта

1. Из 9 одинаковых кубиков склеена фигурка (см. рис). Можно ли её поверхность без щелей и наложений оклеить тремя бумажными прямоугольниками? (Прямоугольники можно перегибать через рёбра; прямоугольники могут быть не одинаковы.)



2. Силач каждым ударом разбивает бетонную плиту или её часть на 3 меньшие части. Сколько ударов ему понадобится, чтобы разбить плиту на 81 часть?

3. В ряд стоит 50 человек, все разного роста. Ровно 15 из них выше своего левого соседа. Сколько человек выше своего правого соседа?

4. Найдите наибольшее семизначное число, которое делится на 36.

5. Алиса, Боб и Влад получили каждый одну и ту же пару чисел. Алиса свои числа сложила, Боб — перемножил, а Влад вычел из одного другое. Все результаты совпали. Найдите исходную пару чисел.

6. В магазине продаются карандаши трёх цветов, трёх разных длин и по трём разным ценам. Обязательно ли можно выбрать из них три карандаша так, чтобы у них всех были разные цвета, разные длины и разные цены?

7. На сколько частей распадется клетчатый квадрат 20×20 , если каждую его клетку разрезать по обеим диагоналям? (На картинке для примера нарисован так разрезанный квадрат 2×2 : он распадается на 12 частей).



8. За круглым столом сидят 10 учеников. Каждый из них задумал число и сообщил его двум своим соседям. После этого каждый ученик сказал вслух сумму чисел, которые ему сообщили. Оказалось, что произнесённые учениками числа в порядке обхода круга: 2, 4, 6, ..., 20. Какое число задумал школьник, сказавший число 12?