*II Европейский математический турнир*
*г. Минск, 1 – 7 марта 2019 года*

## Senior Grand league. Математический бой № 1

*3 марта*

**1.** На каркасе куба с ребром 1 сидят восемь мух. Докажите, что найдутся две мухи на расстоянии, не превышающем 1. Под расстоянием понимается длина отрезка в пространстве между двумя мухами.

**2.** Про различные действительные числа $x$ и $y$ известно, что

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1}.$$

Какие значения может принимать произведение $xy$?

**3.** Прямоугольник $42 \times 44$ разрезан на несколько прямоугольников $1 \times 8$ и две связные фигурки из 4 клеток. Докажите, что эти фигурки равны.

**4.** Даны 2000 различных натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2000}$, каждое из которых меньше, чем $10^{100}$. Докажите, что из этих 2000 чисел можно выбрать два непересекающихся набора $A$ и $B$ так, чтобы у них было одинаковое количество чисел, одинаковые суммы и одинаковые суммы квадратов.

**5.** Два игрока, Антонио и Белла, играют в следующую игру: они кладут на стол кучку из 2019 камней, дальше ходят по очереди. Начинает Антонио. Он может удалить 1 камень, после этого Белла может удалить 1 или 2 камня; после этого Антонио может удалить 1, 2, 3 или 4 камня и т. д. На $n$-м ходу игрок может удалить от 1 до $2^{n-1}$ камней. Игрок, после хода которого на столе не останется камней, выигрывает. Кто может победить, как бы ни играл другой игрок?

**6.** Аня выписала в строчку 120 последовательных натуральных чисел в некотором порядке. Саша выписал под ними еще какие-то 120 последовательных чисел в некотором порядке. Под каждым числом второй строчки Дима написал произведение этого числа и числа, стоящего над ним. Оказалось, что в третьей строчке тоже стоят 120 последовательных натуральных чисел. Докажите, что Дима где-то обсчитался.

**7.** На окружности по часовой стрелке отмечены 2020 точек $A_0$, $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_{2019}$. Все отрезки между точками покрашены в один из двух цветов: красный или синий. Известно, что отрезки $A_iA_j$ и $A_{i+1}A_{j+1}$ разноцветны при любых $i \neq j$ (считается, что $A_{2020} = A_0$). За какое наименьшее число шагов можно гарантированно добраться по красным отрезкам от одной вершины до другой, как бы эти отрезки между точками ни были раскрашены?

**8.** В треугольнике $ABC$ сторона $AC$ короче стороны $AB$, а один из углов, на которые медиана $AF$ делит угол $A$ в два раза больше другого. Точка $D$ на прямой $AF$ такова, что $BD \perp AB$. Докажите, что $AD = 2AC$.

*II European math tournament*
*Minsk, March 1–7, 2019*

# Senior Grand league. Math battle № 1

*March, 3*

**1.** There are eight flies sitting on the edges of a cube $1 \times 1 \times 1$. Prove that there are two flies at a distance not exceeding 1. (A distance between two flies is the length of the segment connecting them.)

**2.** Distinct real numbers $x$ and $y$ satisfy the following condition:

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1}.$$

Determine all possible values of the product $x \cdot y$.

**3.** A rectangle $42 \times 44$ is cut into several rectangles of $1 \times 8$ and two figures of 4 cells. Prove that these two figures are equal.

**4.** Given a set $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2000}\}$ of 2000 distinct positive integers not exceeding $10^{100}$. Prove that we can choose two disjont non-empty subsets $A$ and $B$ which have the same number of elements, the same sum and the same sum of squares.

**5.** Two players, Antonio and Bella, play the following game: there are a pile of 2019 stones, and then they take turns. Antonio starts. He can remove 1 stone from the pile, then Bella can remove 1 or 2 stones; after that, Antonio can remove 1, 2, 3 or 4 stones, etc ... On the $n$-th move, the player can remove from 1 to $2^{n-1}$ stones from the pile. A player wins if after his turn there are no more stones in the pile. Which player can win, no matter how the other plays?

**6.** Anya filled the first raw of a $120 \times 3$ table with 120 consecutive positive integers in some order. Sasha filled the second raw of the table with some 120 consecutive positive integers in some order. In each column, Dima counted the product of two written numbers and wrote down the result in the third empty cell of the column. It turned out that in the third raw there are also 120 consecutive positive integers. Prove that Dima miscalculated.

**7.** There are 2020 points $A_0$, $A_1$, $A_2$, ..., $A_{2019}$ placed on a circle in the following order. All segments between the marked points are painted red or blue. It is known that the segments $A_iA_j$ and $A_{i+1}A_{j+1}$ are painted in different colors for any $i \neq j$ (it is considered that $A_{2020} = A_0$). What is the minimum number of steps required to get from an arbitrary vertex to any other along the red segments, no matter how the segments are painted?

**8.** In a triangle $ABC$, the side $AC$ is shorter than the side $AB$, and one of the corners, into which the median $AF$ divides the angle $A$ is twice the other (i. e. either $\angle FAB = 2\angle FAC$ or $\angle FAC = 2\angle FAB$). The point $D$ on the line $AF$ is such that $BD \perp AB$. Prove that $AD = 2AC$.