I Европейский математический турнир
г. Минск, 27 февраля – 5 марта 2018 года

Высшая лига. Математический бой № 1

1 марта

1. Решите в целых числах систему уравнений $x–yz = 9$, $xy+z = 10$.

2. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны, а диагонали AC и BD перпендикулярны. Докажите, что $AB+CD \le AD+BC$.

3. Докажите, что любой треугольник можно разбить на 22 треугольника, в каждом из которых есть угол 22° и ещё 23 треугольника, в каждом из которых есть угол 23°. При этом ничего лишнего остаться не должно.

4. На доске записаны несколько чисел без знаков: 5, 6, 7, …, 55. Разрешается перед каждым числом поставить знак плюс или минус и вычислить сумму всех чисел. Найдите все возможные натуральные значения таких сумм.

5. Вычеркнули все натуральные числа, в записи которых есть цифра 0, а остальные пронумеровали в порядке возрастания. Верно ли, что для любого натурального числа N найдется невычеркнутое число $A>N$ такое, что A равно своему номеру, записанному в обратном порядке?

6. На клетчатой доске 18×18 лежат несколько неперекрывающихся полосок 1×5. Каждая накрывает только целые клетки. Полоска может вылезать за край доски, но её центр должен быть на доске. Каково наибольшее число полосок?

7. Набор гирь общим весом 1 таков, что вес каждой гири не меньше W, и все гири можно разложить как на 16 групп одинакового веса, так и на 35 групп одинакового веса. При каком наибольшем W это возможно?

8. Можно ли разложить 3600 яблок в 196 стоящих по кругу корзин так, чтобы число яблок в соседних корзинах отличалось ровно на 13?

Авторские задачи: 3,4,5,6,7,8 — А.Шаповалов, 7 – Д.Белов.

Первая лига. Математический бой № 1

1 марта

1. Решите в целых числах систему уравнений $x–yz = 9$, $xy+z = 10$

2. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD опараллельны, а диагонали AC и BD перпендикулярны. Докажите, что $AB+CD \le AD+BC$.

3. Докажите, что любой треугольник можно разбить на 22 треугольника, в каждом из которых есть угол 22° и ещё 23 треугольника, в каждом из которых есть угол 23°. При этом ничего лишнего остаться не должно.

4. На доске записаны несколько чисел без знаков: 5, 6, 7, …, 55. Разрешается перед каждым числом поставить знак плюс или минус и вычислить сумму всех чисел. Найдите все возможные натуральные значения таких сумм.

5. С натуральным числом разрешены две операции:
А) приписать на конце цифру 2; Б) разделить на 2 (Б можно делать только для четных чисел).
(Например, если с числом 6 проделать последовательно операции А, Б, А, получим 312).
Можно ли такими операциями из числа 2 получить 2018?

6. На клетчатой доске 18×18 лежат несколько неперекрывающихся полосок 1×5. Каждая накрывает только целые клетки. Полоска может вылезать за край доски, но её центр должен быть на доске. Каково наибольшее число полосок?

7. Хозяйка испекла пирог весом 1 килограмм. Ее маленький сынишка Петя любит куски побольше, поэтому отрезает куски веса не меньше W килограммов. На праздник придет трое гостей , либо пятеро. При каком наибольшем W Петя заранее может разрезать пирог на несколько частей так, чтобы его можно было раздать поровну и троим гостям, и пятерым?

8. Можно ли разложить 2000 яблок в 212 стоящих по кругу корзин так, чтобы число яблок в соседних корзинах отличалось ровно на 7?

Авторские задачи: 3,4,5,6,7,8 — А.Шаповалов