Математическая абака

27 февраля

Алгебра

1. Аня и Катя могут покрасить забор за 9 часов. Катя и Диана могут покрасить этот же забор за 12 часов, а Диана и Аня — за 18 часов. За сколько часов девочки покрасят забор, работая втроем? Каждая из девочек все время работает с постоянной производительностью.

2. Из Минска отправился непустой поезд, вмещающий не более 404 человек. На следующей станции количество пассажиров в поезде увеличилось на 1,5%. Сколько пассажиров могло изначально быть в поезде?

3. Маша разменяла купюру номиналом 100 рублей, получив 23 монетки номиналом 1, 2 и 5 рублей (не обязательно все номиналы присутствуют). Сколько двухрублевых монет она могла получить?

4. Найдите все пары целых чисел a и b, для которых выполнены два условия: $a < b < 2017$ и $a + b = 4028$.

5. Дано число c (не обязательно целое). Числа a и b удовлетворяют равенствам $3a + 4b = 3c$, $4a - 3b = 4c$. Выразите $a^2 + b^2$ через c.

6. Известно, что $a + b + c = 100$, а $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 0,1$. Чему может быть равно $\frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} + \frac{a}{b+c}$?

Геометрия

1. Каждая точка внутреннего квадрата удалена на 1 см от ближайшей точки внешнего квадрата. Известно, что площадь между квадратами составляет 20 см^2. Найдите площадь меньшего квадрата.

2. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) выбраны точки P и Q (P лежит между A и Q). Оказалось, что $PQ = BQ$ и $\angle CBQ = \angle PBA$. Чему может быть равен угол PBC?

3. На стороне CD прямоугольника $ABCD$ выбрали точку E. Точка, симметричная C относительно отрезка BE, лежит на средней линии прямоугольника, параллельной стороне AB. Найдите угол BED. На всякий случай: средняя линия соединяет середины противоположных сторон.

4. Вычислите углы равнобедренного треугольника, если его высота, опущенная на основание, вдвое меньше биссектрисы угла при основании.

5. В треугольнике, углы которого относятся как 1:2:4, провели все биссектрисы. Какое наибольшее количество равнобедренных треугольников можно выделить на получившемся чертеже?

6. Какое наибольшее число сторон может иметь фигура, являющаяся общей частью треугольника и выпуклого четырехугольника? Нарисуйте пример.

Теория чисел

1. Вова придумал положительную несократимую дробь, у которой сумма числителя и знаменателя равна 2017. Он вычел из числителя 1 и сократил полученную дробь. Получилось $\frac{3}{5}$. Какую дробь придумал Вова?

2. Все делители числа N, отличные от него самого и 1, выписали в строчку. Оказалось, что наибольший из выписанных делителей ровно в 45 раз больше наименьшего. Чему может быть равно N? Укажите все возможные значения.

3. Простые числа a, b и c больше 3. На какое наибольшее натуральное число заведомо делится произведение $(a-b)(b-c)(c-a)$?

4. В каждой клетке таблицы 4×4 записано целое число. Посчитали все суммы чисел по строкам и по столбцам. Какое наибольшее количество различных степеней двойки может оказаться среди данных сумм?

5. Найдите все пары натуральных чисел a и b таких, что $a+b=175$, а произведение ab делится на 175.

6. Числа от 1 до 60 разбили на двадцать троек, и в каждой тройке выбрали среднее по величине число. Какое наибольшее значение может принимать сумма взятых чисел?

Комбинаторика

1. Сколько есть четырёхзначных чисел, в записи которых нет трёх идущих подряд одинаковых цифр?

2. В каждую клетку таблицы 11×11 надо вписать одно из чисел -1, 0, 1 так, чтобы сумма в каждой строке была неотрицательной, а сумма в каждом столбце — неположительной. Каким наименьшим числом нулей можно обойтись?

3. У предпринимателей Саши и Миши было по 40 конфеток. Они начали продавать их по 40 рублей. Если у одного из них покупают конфетку, другой немедленно снижает цену на свои конфетки на один рубль (конфетки продаются только по одной и не одновременно). Сколько денег могут выручить в сумме Саша и Миша, когда продадут все свои конфетки?

4. Дано натуральное число $n \geqslant 3$. Числа 1, 2, …, n записывают в вершины n-угольника. При каких n это можно сделать так, чтобы сумма чисел в любых трех подряд идущих вершинах была четной?

5. В комнате собрались рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, причем как рыцарей, так и лжецов хотя бы по два человека. Каждый присутствующий указал на каждого из оставшихся и произнес: «Ты — рыцарь!» или «Ты — лжец!». Высказываний «Ты — лжец!» было ровно 70. Сколько было высказываний «Ты — рыцарь!»?

6. Телефонная компания «ХаЛяВа» ввела уникальное предложение для детей, позволяющее каждому ребенку выбрать n человек, которым он сможет писать СМС-ки бесплатно. Какое наибольшее количество детей может подключиться к этой компании так, чтобы из любых двух детей один мог бесплатно писать СМС-ки другому?