

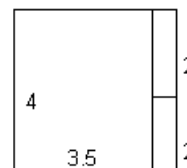
## Matteregatta klass 7-8 den 19 mars 2005

### 1:a omgång ( 14 min, 6 poäng per uppgift)

**1-1** Beräkna produkten  $(1 + 1/5)(1 + 1/6)(1 + 1/7)(1 + 1/8)(1 + 1/9)$

**Lösning.** Skriv om summorna i parantes som oegentliga bråk

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} = [\text{efter förkortning}] = \frac{10}{5} = 2$$



**1-2** Hitta på ett sätt att skära en kvadrat med sida 4 cm i rektanglar på så sätt att summan av rektanglarnas omkretsar är 25 cm.

**Lösning.** Se exemplet på bilden. Här har vi en rektangeln av storlek  $4 \times 3,5$  cm samt två rektanglar av storlek  $2 \times 0,5$  cm.

**1-3** 12 personer sitter i ett rum. Bland de finns hederliga personer som alltid talar sanning, resten är lögnare som alltid ljuger. "Ingen är hederlig här" – sade den förste. "Här finns högst en hederlig person" – sade den andre. Den tredje sade att det finns högst två de hederliga personer i rummet, den fjärde – att det finns högst tre hederliga personer osv. tills den tolfte sade att det finns högst 11 de hederliga personer i rummet. Bestäm antalet hederliga personer i rummet.

**Svar.** 6 hederliga personer.

**Lösning.** Om det finns  $x$  de hederliga, då är de  $x$  första påståenden osanna och resten är sanna. Detta betyder att i rummet finns exakt  $x$  lögnare. Således finns det lika många lögnare som hederliga personer, dvs. 6 personer.

### 2:a omgång ( 14 min, 7 poäng per uppgift)

**2-1** Lös ekvationen  $((x/5-1)/4-1)/3-1)/2-1=15$

**Svar.** 2005.

**Lösning.** Man kan beräkna  $x$  genom att byta samtliga räkneoperationer mot inversa operationer (minus mot plus och dela mot gånger) och utföra dem i omvänd ordning.

$$x = (((((15 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 3 + 1) \cdot 4 + 1) \cdot 5 = 2005$$

**2-2** Bestäm den 1000:e decimalen efter decimalkomma i kvoten  $365/7$ . Motivera sin lösning.

**Svar.** 8.

**Lösning.** Om man dividerar med "liggande stolen" får man kvoten  $52,142857428571\dots$ . Vi ser att siffergruppen 142857 kommer att upprepas oändligt. Gruppen består av 6 siffror. Om vi delar 1000 med 6 fås resten 4. Detta innebär att de första 1000 decimaler består av ett antal hela de siffergrupperna samt 4 första siffror av en grupp till. Då ser vi att just 8 står på 4:e plats i gruppen.

**2-3** Sonja Kovalevsky förskola har ett stor förråd med läskort av två typer: på en del står stavelsen KA, på resten står stavelsen RA. Barnen fick tre kort var. Det visade sig att 20 barn kunde sätta samman ordet KAKA av sina kort, kan, 30 barn ordet RARA samt 40 barn ordet RAKA. Bestäm antalet barn som har tre lika kort. Motivera sitt svar.

**Svar.** 10 barn.

**Lösning.** Vilken som helst barn kan sätta samman antingen KAKA eller RARA, dock ingen kan göra både och. Detta medför att det totala antalet barn är  $20+30=50$ . Endast barn med olika kort kan sätta samman RAKA. Således har resten  $50-40=10$  är just de barn som har tre lika kort.

### 3:e omgång ( 17 min, 8 poäng per uppgift)

**3-1** 24 pendeltåg rullar runt en cirkelbana motsols med jämna mellanrum och konstanta hastighet. Ledningen bestämde att minska mellanrummet med 20%. Hur många lika snabba tåg ska läggas till i tidtabellen?

**Svar.** 6 tåg till.

**Lösning.** För att undvika krångel med bråktaal låt oss införa en nu tidsenhet ”ett moment”. Vi väljer enheten på så sätt att ett tåg ska utföra exakt en runda på 240 moment. Då är mellanrummet mellan tågen  $240/24=10$  moment. Minskat med 20% blir det 8 moment. Då behövs det totalt  $240/8=30$  tåg. Således behöver ledningen  $30-24=6$  tåg till.

**3-2** Finns det ett par tal  $X$  och  $Y$  sådana att  $X+Y=X\cdot Y=X/Y$ ? Om ja, hitta ett exempel. Om nej, motivera varför inte.

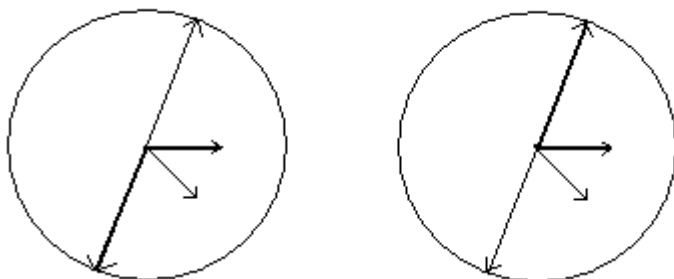
**Lösning.** De finns, till exempel  $X=0,5$  ,  $Y=-1$

**Kommentar.** Den korta lösningen ovan är redan komplett. Dock vore det intressant att få veta hur kunde man hitta paret samt om det finns andra sådana talpar. Faktisk bestäms  $X$  och  $Y$  entydigt. Observera att om  $X=0$ , då i den 1:a likheten  $0+Y=0$ , vilket medför att även  $Y=0$  och man får inte dela med noll. Om däremot  $X\neq 0$  då ur den 2:a likheten fås  $Y=1/Y$ , således  $Y=\pm 1$ . Ifall  $Y=1$  ska den 1:a likheten se ut så här  $X+1=X$  och sakna lösning. Ifall  $Y=-1$  ser den 1:a likheten ut  $X-1=-X$ , vilket medför  $X=-0,5$ .

**3-3** Anta att nu bildar minutvisaren och timvisaren samma vinkel som exakt en halvtimme sedan. Bestäm alla möjliga värden för vinkeln .

**Svar.**  $82,5^\circ$  eller  $97,5^\circ$ .

**Lösning.** På en halvtimme vrider sig minutvisaren exakt  $180^\circ$ , dvs. hamnar den på samma räta linjen fast pekar åt motsatt håll. Samtidigt hinner timvisaren vrida sig endast  $1/24$  av hela varvet, dvs.  $360/24=15^\circ$ . Vi har två fall som visas på bilder nedan. Visarnas läge en halvtimme sedan visas med feta linjer. Låt  $x$  vara den sökta vinkeln. I vänstra fallet gäller  $2x-15^\circ=180^\circ$ , då  $x=97,5^\circ$ . I högra fallet  $2x+15^\circ=180^\circ$ , då  $x=82,5^\circ$



#### 4:e omgång ( 20 min, 9 poäng per uppgift)

**4-1** Johan åkte bil från Stockholm till N-köping. Första halvan av vägen körde han med hastigheten 120 km/tim. Sedan började motorn krångla så att Johan var tvungen att köra resten exakt två gånger långsammare. Hela vägen är 789 km. Bestäm medelhastigheten under hela resan med tre korrekta decimaler.

**Svar.** 80 km/tim.

**Lösning.** Första halvan tog  $(789/2)/120=789/240$  tim. , andra halvan  $(789/2)/60=789/120$  tim. , sammanlagt  $789/240+789/120=789/240 + 2\cdot 789/240=3\cdot 789/240=789/80$  tim. Medelhastigheten är då  $789/(789/80)=789\cdot 80/789=80$  km/tim

**Kommentar.** Observera att vi skulle få samma svar oavsett avstånd mellan städerna.

**4-2** Hitta på två bråk, det ena med nämnaren 8 och det andra med nämnaren 13, som har det minsta möjliga positiva skillnad. Visa att det går ej att hitta på två sådana bråk med mindre skillnad.

**Svar.** Till exempel,  $5/8$  och  $8/13$ .

**Lösning.**  $\frac{5}{8} - \frac{8}{13} = \frac{1}{104}$ . Låt oss visa att en skillnad kan inte vara mindre än  $1/104$ . Ju, man ska först förlänga bråk till en gemensam nämnare. Vi kan alltid ha den gemensamma nämnaren lika med produkten  $104=8\cdot 13$ . Differensen blir då ett bråk med täljaren minst 1, dvs. differensen blir minst  $1/104$ .

**4-3** Rita ett antal räta linjer och markera ett antal punkter på så sätt att det ligger exakt tre markerade punkter på varje linje samt det går exakt tre linjer genom varje markerade punkt.

**Lösning.** Se bilden. Då tre vågräta linjer är parallella och den mittersta ligger på samma avstånd från två andra. Avstånden mellan närliggande punkter på de översta och nedersta linjerna är lika stora.

