Facit till matteregattan den 18 mars 2006

1-1 Peter tog en lång semester för att resa jorden runt. Han startade resan redan på sin första lediga dag den 24 mars 2005 och kom hem på sin sista lediga dag den 18 mars 2006. Hur många dagar bestod semestern av?

Lösning. Låt oss markera alla semesterdagar i en almanacka för året 2005. Det blir då bara 5 dagar omarkerade, nämligen de 19, 20, 21, 22 och 23 mars. Så består semestern av 365-5=360 dagar.

1-2. En kvadratmeter skärs isär i kvadratcentimetrar. Bestäm den totala omkretsen av samtliga delar.

Lösning. En meter består av 100 centimetrar, så en kvadratmeter består av 100×100=10000 kvadratcentimetrar. Omkretsen av en kvadratcentimeter är 4 cm. Så är den totala omkretsen av samtliga delar 10000×4=40000 cm = 400 m.

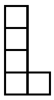
1-3 Bestäm det närmsta årtal i det förflutna med samma siffersumma som hos dagens årtal. Motivera varför samtliga närmare årtal ej passar.

Lösning. Detta är året 1700. Siffersummorna stämmer: 1+7+0+0=2+0+0+6=8. Alla årtal mellan 1700 och 2006 börjar med siffror 17, 18, 19 eller 20. Om ett sådant årtal börjar med 17 finns det minst en siffra till som är större än 0. Så är siffersumman större än 8. Siffersumman av vilken som helst årtal 1800 till 1999 är större än 8 pga redan två första siffror. Siffersumman av vilken som helst årtal 2000 till 2005 är mindre än 8.

2-1 Under våren gick Karlsson ner 25% i vikt, under sommaren lade han på 20% av sin vikt, sedan tappade han 10% av sin vikt under hösten, men gick under vintern upp 20% igen. Bestäm om Karlsson gick upp eller ner i vikt under året, och ange procent.

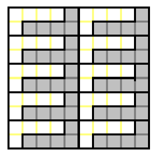
Svar. Karlsson gick 2,8% ner i vikt.

Lösning. Låt oss kalla en hundradel av Karlssons ursprungliga vikt för *kar*. Ett år sedan vägde Karlsson 100 kar. När han gick 25% ner i vikt, vägde han 75 kar. När han sedan gick 20% upp i vikt blev vikten 75+75·20/100=90 kar. När han sedan gick 10% ner i vikt vägde han 90-90·10/100=81 kar. Till sist efter tilläget på 20% blev hans vikt 81+81 ·20/100=97,2 kar. Totalt gick Karlsson 100-97,2=2,8 kar ner i vikt under året , vilket innebär 2,8% minskning.



2-2 Visa hur man kan sammansätta en kvadrat av ett antal lika stora rutiga brickor som liknar ett L (se bilden till vänster).

Lösning. Två stycken L kan läggas ihop till en rektangel av storlek 2×5. Tio sådana rektanglar bildar en kvadrat av 10×10 (se bilden till höger)



2-3 John hade en korg full av semrullor. Först mötte han Anna or gav henne hälften av alla semrullor plus en halv semrulla. Sedan mötte han Hanna och gav henne hälften av alla semrullor som fanns kvar plus en halv semrulla. Till sist mötte han Johanna or gav henne hälften av alla semrullor som fanns kvar plus en halv semrulla. Nu var korgen tom. Bestäm hur många semrullor John hade ursprungligen. (Vad är semrullor egentligen? Det kan vi inte reda på därför att det inte finns några kvar).

Svar. 7 semrullor

Lösning. Låt oss filma händelseutvecklingen och titta på filmen baklänges. Nu möter John flickorna i omvänd ordning. Varje flicka först ger honom en halvsemrulla och sedan fördubblar antalet semrullor hos honom. Efter mötet med Johanna blir det (0+0,5)·2=1 semrulla i korgen. Efter mötet med Hanna blir det (1+0,5)·2=3 semrullor. Till sist efter mötet med Anna blir det (3+0,5)·2=7 semrullor.

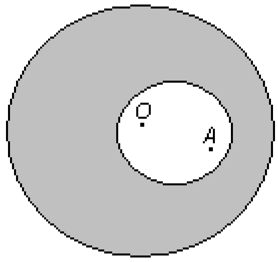
3-1 Pippi hade en kastrull full av kompott med persikor. När hon åt upp hälften av persikorna sänktes kompottens nivå med en tredjedel av kastrullens volym. Resten av kompotten (både vätska och persikor) hällde Pippi över till en burk, som blev exakt full till kanten. Nästa dag åt Pippi upp hälften av de persikor som fanns kvar. Nivån sänktes ännu en gång. Med hur stor del av burkens volym sänktes nivån?

Svar. Med en fjärdedel.

Lösning. För att undvika krångel med bråktal låt oss mäta volymer i muggar sådana att kastrullen rymmer exakt 6 muggar. För att sänka nivån med en tredjedel åt Pippi 2 muggar persikor upp. 4 muggar kompott är kvar. Detta var exakt en burka. Såsom Pippi åt hälften av persikor upp är det 2 muggar persikor kvar i burken. Nästa dag åt Pippi en mugg persikor upp och sänkte således nivån i burken med en fjärdedel.

3-2 På en papperscirkel finns en inre punkt markerad och skild från medelpunkten. Hur kan man klippa cirkeln i två delar och lägga ihop de delarna till en ny cirkel på så sätt att den markerade punkten blir medelpunkten?

Lösning. Förena den markerade punkten *A* med medelpunkten *O*, och klippa ut en mindre cirkel med medelpunkten i mittpunkten av sträckan *OA*. Den mindre cirkeln måste omfatta både *A* och *O* (se bilden). Vrida den inre cirkeln ett halvtvarv. Punkterna *A* och *O* byter plats med varandra.



Anmärkning. Man får klippa ut vilken som helst figur som är simmetrisk kring sträckans mittpunkt (till exempel, en rektangel).

3-3 En kvadratisk tabell på 5×5 rutor fylls i med heltal. Det är känt att i vilken som helst kvadratisk del av tabellen på 3×3 rutor är summan av talen lika med 0. Kan summan i hela tabellen vara annat än 0? Om ja uppvisa ett exempel. Om nej motivera varför summan alltid är lika med 0.

Svar. Ja, det kan.

Lösning. Placera det negativa talet –8 i den centrala rutan och fyll i övriga rutor med ettor. Vilken som helst kvadratisk del på 3×3 rutor innehåller bland annat den centrala rutan. Så innehåller vilken som helst kvadratisk del 8 rutor med ettor och en ruta med –8, sammanlagt 0. I den hela tabellen finns det 24 ettor och en –8, sammanlagt 24-8=16≠0.

4-1 Från byn A respektive byn B startade en cyklist och en motorcyklist samtidigt att färdas mot varandra. Motorciklisten kör De höll en konstant hastighet, motorcyklisten kör snabbare. Det visade sig att om en timme fanns cyklisten just i mittpunkten mellan byn A och motorcyklisten. Om en timme till blev de båda på lika långa avstånd från byn A. Bestäm förhållandet mellan hastigheterna av motorcyklisten och cyklisten. Motivera ditt svar.

Svar. Motorcyklisten kör 4 gånger snabbare.

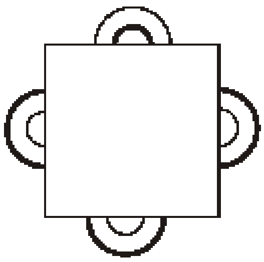
Lösning. Betrakta läget efter den första timmen: cyklisten är i en punkt V och motorcyklisten i en punkt M- Vi vet att AV=VM. Således kommer cyklisten exakt i M om en timme till då han tillryggalägger samma avstånd till. Dock körde redan motorcyklisten därifrån. För att hamna på samma avstånd från A som cyklisten måste motorcyklisten köra över på andra sidan A i en punkt C (se bilden). Då CA=AM, är CM=2AM=4VM. Så tillryggalagt motorcyklisten 4 gånger så mycket som cyklisten under andra timmen. Detta innebär att hans hastighet är 4 gånger så stor som cyklistens hastighet.

4-2 Runt jordklotet bildades en järnring längs ekvatorn tätt intill markytan. Ringen värmdes upp och blev en meter längre. Då bildades en jämn glipa mellan ringen och markytan. Bestäm avståndet mellan ringen och markytan. Ange svaret med 10 procents noggrannhet (två korrekta decimaler). Anta att ekvatorn har längden 40000 km.

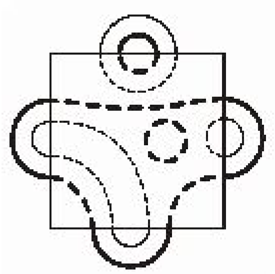
Svar. Cirka 16 cm.

Lösning. Vi räknar i metrar. Ekvatorns längd är 40000000 м. Både ekvatorn och ringen är cirklar. Som bekant är cirkelns längd 2π·radien, där $\pi \approx 3{,}14$. Den ursprungliga längden av ringen är lika med ekvatorns längd så är den ursprungliga radien $40000000/2\pi$ m. Den uppvärmda ringen blev fortfarande en cirkel. Den nya längden blev 40000001 m, så blev den nya radien $40000001/2\pi$ m. Avståndet mellan ringen och markytan är lika med skillnaden mellan radierna dvs är $40000001/2\pi - 40000000/2\pi = 1/2\pi$ m $\approx 1/6.28 \approx 0{,}1592$ m $\approx$ 16 cm.

Anmärkning. Ett resultat beror inte på den ursprungliga ringens längd (den försvinner när vi drar av), men bara på tilläget. Om tilläget är detsamma så blir det en glipa av samma vidd för en ring kring Månen, Jupiter eller en tunna med sill.



4-3 Sex konturer av metalltråd ligger på ett bord. Konturerna ej korsar varandra. De är delvis gömda under ett pappersblad (se bilden). Tre av konturerna är av koppartråd (de tjockare) och tre av aluminiumtråd (de smalare). Man vet att en kontur ligger helt gömd under bladet medan de 5 övriga är delvis synliga. Bestäm om den gömda konturen är av koppar eller av aluminium? Det räcker att svara med en bild av konturerna om man tar bort bladet.



Lösning. Den dolda konturen är av koppar (se bilden till höger)