***А.В.Шаповалов***

# Уравнение за кадром, или Учим строить математическую модель.

## Текст по мотивам выступления на семинаре учителей 5 мая 2016 г, Сириус, Сочи

Обучая математике, мы обычно ограничены количеством часов, зато можем управлять качеством. Последнее включает ту или иную свободу в выборе материала, и ещё большую — в выборе форм подачи материала и расстановке акцентов. Неопытный учитель скован программой, для опытного она не большая помеха, чем погода или закон всемирного тяготения. Итак, вы научились в заданных рамках пользоваться свободой выбора материала. Как её применить?

Прежде всего надо ранжировать знания и навыки по степени их полезности или хотя бы по степени применимости в дальнейшем. Причем речь идет не только о применимости в математике или на других уроках, но и за пределами школы. То, что редко применяется — быстро забывается. Даже если ученик выучил сложение дробей как следует, но пару лет не применял их — он почти наверняка это забудет. Значит, важный навык у ученика нужно не только выработать, но и поддерживать. Крайне желательно, чтобы поддержка проходила в непринужденной форме, а не как занудное напоминание вида «а вот сейчас мы в 100-й раз повторим, как». Если сложение дробей будет регулярно возникать как сама собой разумеющаяся часть других задач, оно усвоится и станет таким же автоматическим, как застегивание пуговиц.

Отсутствие ранжирования приводит к перекосам и неоправданным затратам времени. Вот например, умение решать квадратное уравнение мне не пригодилось ни разу в жизни за пределами моей профессиональной деятельности как преподавателя: ни в программировании, ни в обыденной жизни. А вот умение работать с арифметической прогрессией — найти $n$-й член или просуммировать — требуется регулярно. Между тем, в школьной программе квадратными уравнениями мучат всех и подолгу, а прогрессию почему-то проходят только в старших классах и, как правило, мельком.

По моему опыту линейное уравнение нужнее квадратного, обратный ход нужнее линейного уравнения, сопоставление двух точек зрения (подсчет двумя способами) еще нужнее и т.д. Интеграл и числа Фибоначчи встречаются одинаково часто, а тригонометрическое уравнение вообще никогда.

Но всего не перечислишь, да и опыт у каждого свой. Так что ранжирование каждый может сделать сам. Ключевое слово здесь: применение.

Математическая подготовка состоит из двух частей: знания математических формул и теорем и умения их применять. Давайте посмотрим повнимательнее: а к чему, собственно, мы хотим применять эти знания? Первый ответ будет: к математическим задачам, стандартным и, возможно, нестандартным. А откуда возьмутся эти задачи? Про стандартные понятно: есть типовые ситуации вроде подсчета сдачи, надбавки к зарплате, бюджета времени, количества стройматериалов и т. п. Н-да, как-то бедновато. Стоит ли ради этого зубрить математику 10 лет? Кроме того, такие расчеты все больше и больше закладываются в компьютеры: вызвал нужную программу, набрал исходные данные, нажал кнопку — и получил результат. Понятно что в некоторых профессиях список стандартных задач шире, при расчетах нужны квадратные уравнения, синусы-косинусы, интегралы. Ну так и там нужные программы для компьютеров тоже уже написаны, только, возможно, вместо числовых данных придется какие-нибудь функции вводить, и ответ может быть графиком или формулой. Но сути дела это не меняет: ввел, нажал, получил результат.

Но есть же ещё и нестандартные задачи?! Есть, только к ним готовят меньшинство школьников. Считается, что такие задачи нужны лишь тем, кто обладает творческим мышлением и собирается посвятить свою жизнь точным наукам. Процент творчески мыслящих учеников действительно невелик, из них выходят победители олимпиад. Любопытно, однако: в науку из них идут лишь немногие, большинство оказываются востребованы в массовых профессиях –

программисты, менеджеры, экономические аналитики. Но и менее успешные участники олимпиад, летних школ и математических кружков находят себя в этих профессиях. Востребованным оказывается умение разбираться в нестандартных ситуациях. А оно не столь уж редко. Вспомните, ведь и вам наверняка приходилось в такие ситуации попадать: отменили электричку, забыли дома кошелёк, ключ перестал открывать дверь… В общем, стандартный способ перестал работать, но вы как-то разобрались и выкрутились. Скажем, применили какие-то знания или средства, о которых в нормальной ситуации и не вспоминали.
Ровно так же решаются и нестандартные задачи, в частности, пресловутая задача С6 из ЕГЭ. Математических знаний для неё нередко хватает и семикласснику, но подводит неготовность разбираться в ситуации. Вот эту-то готовность кружковцы и олимпиадники в себе постоянно и тренируют, и она потом им помогает в жизни даже тогда, когда содержимое уроков оказывается забытым.
Традиционный курс математики в школе содержит, конечно, навыки анализа ситуации. Однако потребность в таких навыках возникает сравнительно редко и нерегулярно. Темы, где навыки нужны, заслуженно считаются сложными (например, математический анализ или решение неравенств с рациональными функциями). Кружковцы же с этими темами обычно справляются гораздо успешнее. Хитрость тут в том, что навыки и сложный материал они изучают по отдельности: навыки приобретаются в младших классах и на простом и интересном в этом возрасте материале, а сложный материал в старших классах ложится на уже подготовленную почву. Помогает и то, что привыкание к непростым навыкам происходит без спешки, в течение длительного периода, а не за короткие недели, отведенные на усвоение темы.
Что же это за навыки такие волшебные? И нельзя ли научить им и обычных, не слишком склонных к математике учеников? Нет ли понятных, более-менее традиционных задач, на которых этим навыкам можно учить?

Для ответа на этот прикладной вопрос давайте сначала ответим на фундаментальный: а чем вообще занимается математика? Это наука естественная или гуманитарная? Естественная? А где в природе вы видите отрицательные и нецелые числа, точки нулевой ширины, бесконечные прямые линии? Это ведь всё абстракции, существующие в головах людей. Но может математика - наука гуманитарная? Почему же тогда её предсказания для физики, химии и даже биологии столь эффективны? Похоже, что математика занимает особое положение между естественными и гуманитарными науками.
Неожиданный ответ на эти вопросы дает профессор С.Р.Когаловский: математика — это наука о том, как человек познает окружающий мир с помощью особого типа мышления, называемого *математическим моделированием.* Математика потому и эффективна, что она часть генетически заложенной способности человека к познанию. Вообще, понять – это построить в голове модель. Вот умение строить математические модели и является фундаментальным навыком. Те термины, понятия, формулы, теоремы, которые мы сообщаем школьникам — это кирпичики, из которых они будут строить модели. Хотя точнее сказать, не строить, а описывать и исследовать. Потому что модель в голове ученика строится часто из каких-то смутных, одному ему понятных образов. Собственно, каждый ребенок сделал гениальное математическое открытие: он самостоятельно открыл математическую структуру родного языка, чтобы заговорить на нем. Теперь эта модель сидит у него в голове, он ею успешно пользуется, благо ему не надо её описывать. А вот когда он разбирается с задачей или ситуацией на уроке, ему надо будет сообщить решение — вот тут-то изученные термины и пригодятся.

Итак, главная цель — научить строить продуктивную математическую модель. Это значит: разобраться в ситуации и *описать её на математическом языке*, сохранив (математическую) суть и отсеяв ненужное. Почему именно это — главное? Потому что в 99 случаях из 100 человек использует математику как прикладную науку: в экономике, в инженерном деле, в программировании и т. п. И в первую очередь ему из задания, сформулированного на языке прдметной области, вычленить и сформулировать математическую суть. Если он не сделает этого сам, то никакой математик ему не поможет: ведь математик предмета не знает. А вот если он правильно первел задачу на язык математики, то специалисты по решению скорее всего найдутся. И останется только перевести решение обратно на предметный язык.
Итак, внешним проявлением построения математической модели является переформулировка задачи, то есть как бы перевод с одного языка на другой.
Из этого уже очевидно, что для этой цели наиболее подходят текстовые задачи. Их можно и нужно практиковать, начиная с первого класса и заканчивая 11-м. Условие описывается на обычном человеческом языке, с его нечеткостями и избыточностью. Неясностей не надо боятся,

пусть школьники учатся переспрашивать и уточнять. Именно эти вопросы и ответы и покажут вам, как идет осмысление и перевод с житейского языка на математический.
Когда я ещё учился в школе, текстовые задачи были неотъемлемой частью уроков арифметики, скучной, но полезной. В учебниках алгебры их уже было меньше, и они были однообразнее: в основном на движение и совместную работу. И только попав на олимпиаду, я опять к своей радости увидел много разнообразных и интересных текстовых задач.
Сейчас много подходящих задач для всех возрастов можно найти в сети и в книгах (см. список литературы).
Но не приведет ли увлечение текстовыми задачами к пренебрежению другими аспектами в изучении математики: усвоению математического языка и математических понятий, отработке стандартных математических действий. И неужели все нетекстовые задачи для главной цели не годятся? Ведь обычно мы даём ученику задачу, уже сформулированную на математическом языке. Скажем, сложить две дроби или решить квадратное уравнение. Здесь переводить на математический язык ничего не надо, и получается, что построения модели нет?
В простейших примерах нет, соглашусь я. Такие примеры в самом деле годятся только для отработки стандартных навыков-алгоритмов, а для главной цели не подходят. Однако стоит их немного изменить, как указанный момент возникнет. Можно, например, дать неполное квадратное уравнение или уравнение $x(x+2)=15$. Ученик должен понять, что оно на самом деле квадратное – только надо его преобразовать. Конечно, само преобразование стандартно, но оно становится стандартным только когда отработано. А вначале школьнику самому придется догадаться до нужных шагов. Это и будет тренировкой умения переформулировать. Часто преобразования можно выполнить разными путями, и надо дать школьнику возможность самому выбрать путь. Вообще, выбор такого пути – это искусство (большое или маленькое – зависит от задачи). Надо помочь ученику овладеть этим искусством. Умение ориентироваться в условиях неоднозначного выбора более важно, чем умение ходить по быстро ведущей к цели проторенной дороге. Проблема в том, что даже хорошо зная сеть таких дорог, но плохо ориентируясь, школьник может не увидеть хода ни к одной из них. Кроме того, умение ориентироваться включает в себя умение заметить свой шаг в неверном направлении и вернуться на верный путь. Помня об этом, опытный учитель всегда сохранит хотя бы маленький элемент новизны, чтобы школьник чувствовал себя первооткрывателем, а не калькулятором, на чьи кнопки нажимают.

Попробуем конкретизоровать вышесказанное на примере обучения уравнениям. Почему именно им? Так ведь весь школьный курс алгебры пронизан ими. А теперь спросите обычного человека через 20 лет после окончания школы: как часто ему в его жизни пригодились уравнения. 95% искренне ответят «Никогда». И ведь среди опрошенных, помимо охранников, продавцов и секретарш, будут и топ-менеждеры, и офицеры, и, о ужас, инженеры[1]. Почему? А все потому же: 90% учебного времени уходит на то, чтобы научить уравнения *решать*, ещё 9% – чтобы научить их составлять для узкого списка *специально подобранных задач*. Тот 1% случаев, когда уравнение естественно возникает и эффективно применяется, явно недостаточен для закрепления в памяти учеников.
Но, казалось бы, похожие проблемы должны возникать и с другими математическими навыками. Они и возникают, но все же не до такой степени: складывать-вычитать население худо-бедно умеет, проценты подсчитывает, и немало таких, кто может рассчитать, как развести краску или другой раствор до нужной концентрации. Что же такого заковыристого в уравнениях?
А колдовство, о котором почему-то не предупреждают: возможность что-то узнать наверняка, *сравнивая две неизвестные* величины. Решая «ненастоящее» уравнение $2x+5=17$, мы чуда не увидим. Просто проделаем действия в обратном порядке: сложение заменим на вычитание $2x=17-5=12$, а умножение – на деление $x=12:2=6$. Этот приём называется *обратный ход*, он подсказывается здравым смыслом и воспроизводится по мере необходимости. А вот в уравнении $2x+5=5x-13$ неизвестная входит в обе части. Их значений мы не знаем, но из

1 Последнее не шутка: я участвую в разработке коммерческой компьютерной программуы для моделирования микроклимата в зданиях. Пользуясь ей, инженеры навешивают на чертеж здания радиаторы, двери, вентиляторы и другое оборудование, затем нажимают кнопку и видят разные графики, скажем по теплу, влажности, освещенности. Чтобы выдать графики, программа сама составляет систему уравнений и решает её. Так вот, нам сторого запрещено в диалоге с пользователем упоминать слово «уравнение» – чтобы не отпугивать клиентов.

совпадения можем найти. Решение последнего уравнения трудности не представляет, но вот идея свести решение задачи к сравнению двух *неизвестных* величин здравому смыслу противоречит. Она выглядит примерно столь же контринтуитивной, как вопрос в логичкой задаче вида «... Я не знаю твоего числа, сказал первый. И я не знаю твоего числа, сказал второй. Найдите эти числа» (см. например[2]).

Итак, самая большая трудность при применении уравнения: поверить, что оно поможет помочь! Не упускайте возможности показать это школьникам. Ситуаций полным-полно! Скажем, верным признаком полезности уравнения является применение метода проб и ошибок: задрал ствол пушки повыше — перелет, опустил пониже — недолет; ага, значит ставим ствол в промежуточное положение. Кажется, что не зная явной зависимости дальности выстрела от угла наклона, уравнения не напишешь. Но оценив величину перелета и недолета, мы можем с помощью линейной интерполяции значительно увеличить точность следующего выстрела. А линейная интерполяция — это линейное уравнение (готовые формулы мало кто помнит, да и зачем). Конечно, вряд ли на уроке вам понадобится разбираться со стрельбой, но можно, скажем, продемонстрировать это на приближенном вычислении квадратного корня. Пусть нужен $\sqrt{150}$. Знаем $12^2=144$ – недолет 6, $13^2=169$ — перелет 19. Обозначив дробную часть искомого корня x, считаем, что x и 1-x пропорциональны 6 и 19: $x/6=(1-x)/19$, откуда $x=0{,}24$, $\sqrt{150}\approx 12{,}24$. На самом деле $\sqrt{150}=12{,}2474...$ – ошибка меньше одной сотой. Всё-таки, кроме внутриматематических приложений, ищите возможность продемонстрировать полезность уравнений и вне математики — без этого большинство учащихся в них в глубине души не поверят...

Уравнения идут рука об руку с другим важным приёмом в математике: подсчётом двумя способами. В школьной программе он вообще не упомянут, но в кружковой математике это один из базовых принципов. С одной стороны, он универсален, и составление уравнений и неравенств на него опирается. С другой стороны, он понятен и нагляден, и есть много ситуаций, где легко продемонстрировать его полезность. Поэтому сказать об этом приёме можно школьникам любого возраста, а дальше в самых разных ситуациях ненавязчиво напоминать о нем. Идея проста: увиденное двумя глазами всегда больше, чем сумма увиденного каждым глазом по отдельности. В частности, если что-то можно подсчитать двумя разными способами, это всегда можно использовать. Второй подсчет поможет проверить первый. Из двух вариантов можно выбрать тот, что короче для записи. Самое же главное: если результаты выглядят по-разному, то может получиться либо противоречие (и мы поймем, что таких объектов не бывает), либо уравнение (и это поможет нам найти что-то неизвестное).

Вернемся к уравнениям. Даже если школьники привыкли к идее подсчета двумя способами и поверили, что уравнение — это хороший помощник, останется непростая техническая проблема – как уравнение составить. Для некоторых камень преткновения — написать букву вместо неизвестного числа. Это нежелание преодолевается тренировкой, то есть решением некоторого количества задач на составление уравнений. Вначале можно и нужно подсказывать, что выбрать за $x$. Но учитель не должен забывать, что выбор неизвестного — это искусство, полностью формализовать его нельзя. В любой мало-мальски содержательной задаче выбор неоднозначен. Научитесь уважать выбор школьника, даже если он ведет к более громоздким уравнениям и выкладкам. Не набив себе шишек, ученик не научится этот выбор оптимизировать, и тем более не научится составлять уравнение там, где оно не очевидно.

Кроме трудных текстовых задач есть немало чисто математических задач, которые при первом взгляде не отнесешь к задачам на уравнение. Я их называю «уравнение за кадром». Решение и разбор этих задач выполняют важную методическую функцию: они разрушают у учащихся неправильный стереотип — мол, уравнение надо писать только в тех задачах, где в условии есть ключевые слова (например, бассейн, трубы, скорость, время и т. п.). У кого-то список слов короткий, у кого-то подлиннее. Но любой такой список — это попытка заменить содержательный анализ ситуации и построение адекватной математической модели на упрощенный алгоритм. Повторюсь: даже неумелый анализ и моделирование гораздо важнее умения написать и решить уравнение по шаблону.

Разберем несколько примеров.

**1.** Возле каждого из углов прямоугольного бассейна 10×25 м стояло по спортсмену. Тренер подошел к краю бассейна, и подозвал к себе всех спортсменов. Все подошли кратчайшими

---

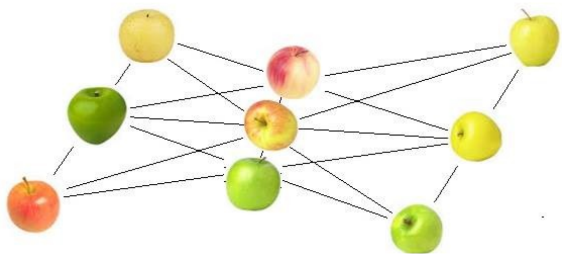
2 В одиночных камерах сидят 4 друга-математика. Каждому из них сообщили, что их номера в списке различны, двузначны, и один из этих номеров равен сумме трёх других. Но, даже узнав номера троих других, никто из них не смог вычислить свой номер. Так какие же у них были номера?

путями по кромке бассейна. Известно, что трое прошли в сумме 50 метров. Сколько прошел четвертый?
**Указание.** Заметим, что сумма расстояний, пройденных спортсменами, не зависит от расположения тренера и равна периметру бассейна.
**Комментарий.** Задача сравнительно проста, поскольку ключевые слова правильно подталкивают к написанию уравнений. Неожиданна единственность ответа: ведь положение тренера не определяется однозначно. Обратите внимание, что в условии минимально количество математических терминов (например, вместо «периметра» употреблено нематематическое слово «кромка»). Это дает маленькое упражнение по переводу на математический язык и маскирует подсказку «посчитайте периметр двумя способами»).

**2.** Большой клетчатый прямоугольник разрезали на 4 меньших прямоугольника двумя перпендикулярными разрезами, идущими по сторонам клеток. Одна из частей состоит из 12 клеток, другая – из 15, третья – из 44. Из какого количества клеток состоит большой прямоугольник?
**Ответ.** 55.
**Указание.** Равны произведения площадей прямоугольных частей в противоплжных углах. Разбиение на пары противоположных частей однозначно ввиду соображений делимости.
**Комментарий.** Школьники, скорее всего, буду решать эту задачу перебором, рисуя в клетчатой тетради немногочисленные конкретные варианты. Обсудите с ними, что делать, если бы числа в задаче были велики. Идея уравнения здесь возникает из наблюдения изначально неочевидного равенства произведений площадей. Когда две величины, вычисленные *разным способом,* оказываются равны, это почти всегда повод написать уравнение.

**3.** Даны три числа. Если их все увеличить на 1, то их произведение тоже увеличится на 1. Если все исходные числа увеличить на 2, то их произведение тоже увеличится на 2. А на сколько увеличится произведение, если все исходные числа увеличить на 3?
**Ответ.** На 9.
**Указание.** Обозначим исходные числа $x$, $y$, $z$, и положим $p=xy+xz+yz$, $s=x+y+z$. Тогда все три приращения линейно зависят от $s$ и $p$. Составив и решив систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными, найдем третье приращение.
**Комментарий.** Хороший пример внутриматематичсекой переформулировки. Естественные неизвестные позволяют записать уравнения, но это система двух уравнений второй степени с тремя неизвестными. Заметив повторяемость, введем новые неизвестные, сильно упростив систему.

**4. Ряды яблок.** На столе лежат 9 яблок, образуя 10 рядов по 3 яблока в каждом (см. рис.). Известно, что у девяти рядов веса одинаковы, а вес десятого ряда отличается. Есть электронные весы, на которых за рубль можно узнать вес любой группы яблок. Какое наименьшее число рублей надо заплатить, чтобы узнать, вес какого именно ряда отличается?



**Совет.** Надо не тратить деньги, а подумать.
**Ответ.** 0 рублей. Отличается вес среднего горизонтального ряда.
**Указание.** У нас есть 10 весов рядов, из них 9 весов совпадают. Сумма весов всех яблок тремя способами представляется как сумма весов трех рядов, причем в эти тройки входят все ряды, кроме упомянутого в ответе. Зпишем равенство сумм двух троек. Если какое то из слагаемых отличается, обозначим его $x$, а остальные $a$. Решив уравнение, найдем $a=x$. Значит, все 9 рядов, вошедшие в тройки, весят одинаково.
**Комментарий.** Задача была придумана специально, чтобы щелкнуть по носу тех, кто «набивал руку» на задачах на взвешивание в ущерб умению думать. Уравнение здесь запрятано не слишком глубоко, но скрыто от тех, кто смотрит только на антураж.

**5.** Род Муромцевых (ныне, увы, прекратившийся) основали трое сыновей Ильи Муромца. Все мужчины в этом роду имели по трое детей, за исключением семерых, не оставивших потомства. Всего в роду были 1994 женщины. Сколько всего человек было в роду Муромцевых? (Роду принадлежали основатели, а также те и только те дети, чей отец принадлежал роду).

**Ответ.** 3000.
**Указание.** Обозначив m число мужчин рода, общее число людей рода считаем двумя способами: как сумма мужчин и женщин, и как сумма сыновей Ильи Муромца и детей мужчин рода. Из полученного уравнения найдем m.
**Комментарий.** Трудность здесь тоже в антураже, который побуждает применять теорию графов (ведь «генеалогическое дерево»!), а не уравнение.

**6.** Дорожки парка идут вдоль краев двух квадратных газонов с одной общей стороной. Вокруг газонов (каждый вокруг своего) против часовой стрелки гуляют с постоянными скоростями. Ватсон и на 20% быстрее него Холмс. Время от времени они встречаются на общей дорожке. Во второй раз они встретились через 10 минут после первого, а в третий – через 10 минут после второго. Через какое время они встретятся в 4-й раз?
**Ответ.** Через 35 мин.[3]
**Комментарий.** Эта по-настоящему трудная задача служит обратным примером: здесь попытка обойтись *только* уравнениями не проходит. Без них на начальном этапе не обойтись, но далее нужен переход к дискретной модели прыжков по вершинам правильного 11-угольника. Подробное решение можно найти в книге [Сав], задача 114.

# Список литературы


[Вер] А.В. Шаповалов, И.В. Ященко. Вертикальная математика для всех. Готовимся к задаче С6 ЕГЭ с 6-го класса. – М.: МЦНМО, 2014.

[Кук] А.В. Адельшин, Е.Г. Кукина и др. . Математическая олимпиада им. Г.П.Кукина. Омск 2007–2010. – М.: МЦНМО, 2011.

[Рег] А.Д. Блинков, Е.С. Горская, В.М. Гуровиц. Московские математические регаты. – М.: МЦНМО, 2007.

[Сав] А.В. Шаповалов, Л.Э. Медников. XVII турнир математических боев имени А.П.Савина. – М.: МЦНМО, 2012.


www.ashap.info/Nauka/pedagog.html

3 Подробное решение см. в [Сав].