А. В. Шаповалов

Подготовка к изучению последовательностей

Материалы к выступлению на семинаре учителей
Сириус, Сочи, 21 сентября 2017 г.

Необходимость пропедевтики

- Сложность изучаемого понятия или метода
- Формализация мешает неформальному усвоению
- Мало времени в учебном плане

Изучение последовательностей – в чем сложность

- Бесконечность
- Восприятие сложного объекта как единого целого
- Недоусвоенные обозначения a_1, a_n, a_{ij}
- Нет запаса примеров
- Последовательности создают новые задачи, а не помогают решить старые

А.Д. Блинков «Последовательности»

Из предисловия к книге

…уже в самом раннем возрасте, учась считать, ребенок сразу сталкивается с простейшей последовательностью: последовательностью натуральных чисел. В дальнейшем, умение найти простейшие закономерности, удобные способы суммирования, и т. п., требуется для решения многих задач, с которыми дети сталкиваются не только при изучении математики. С этой точки зрения весьма полезно уделить этой теме ряд занятий математического кружка, начиная с 5 класса.

Занятие 1. Поиск закономерностей. Занятие доступно учащимся 5 – 6 классов. Оно посвящено поискам и «вербализации» закономерностей в простейших числовых последовательностях и заполнению пропусков в этих последовательностях в соответствии с найденными закономерностями. Особое внимание уделено задачам, в которых демонстрируется возможность задания одной и той же последовательности различными способами, а также задачам, решение которых подготавливает к изучению прогрессий.

Занятие 2. Закономерности сумм и произведений. Занятие ориентировано на учащихся 5 – 6 классов. Оно посвящено простейшим приемам, с помощью которых можно находить суммы с большим количеством слагаемых и произведения большого количества сомножителей. В частности, вычисляются суммы некоторых арифметических и геометрических прогрессий (не вводя их определений). На отдельных примерах демонстрируются возможности «комбинаторного» и «геометрического» способов суммирования.

Занятие 3. Восстановим члены последовательности. Занятие ориентировано на учащихся 6 – 7 классов. Оно служит для того, чтобы школьники освоились с различными правилами, по которым могут быть заданы последовательности (как конечные, так и бесконечные) и научились восполнять «пробелы» в различных числовых рядах. Обсуждаются два основных способа задания числовых последовательностей: рекуррентный и формулой n-го члена. В ряде задач потребуется самим установить и обосновать закономерности, на основании которых можно будет вычислить члены с достаточно большими порядковыми номерами.

Занятие 4. Зацикливание. Занятие ориентировано на учащихся 7 – 8 классов. Оно посвящено решению задач, в условии которых различными способами заданы периодические последовательности. В процессе решения и разбора задач школьники смогут научиться распознавать такие последовательности, находить их период и члены с конкретными номерами. Особое внимание уделено алгебраическим методам решения, в частности, использованию равенств из условий задач в общем виде.

Занятие 5. Суммирование. Занятие ориентировано на учащихся 7 – 8 классов. Рассматриваются способы суммирования, основанные на применении некоторых алгебраических тождеств. Отрабатываются стандартные приемы, характерные для многих алгебраических задач (не только связанных с последовательностями): представление дроби в виде суммы или разности, прибавление и вычитание одного и того же выражение для получения «удобного» выражения, освобождение от иррациональности в знаменателе дроби, и пр.

Числовые закономерности. Арифметическая прогрессия.

Листок к занятию в гр. 7А, Сириус, сентябрь 2017

1. Продолжите ряд чисел
а) 1,5; 1,65; 1,8; 1,95; …
б) 4, 12, 36, 108, …
в) 2, 5, 10, 17, 26, 37, …
г) 1/6, 1/4, 1/3, 5/12, ½, …
д) 8, 12, 18, 27, …

2. **а)** Для каждого из рядов предыдущей задачи определите, какое число будет стоят на 10-м месте.
б) А на 100-м?

3. **а)** На числовой прямой отметили 100 точек так, что расстояние между соседними точками равно 7. Каково расстояние между крайними точками?
б) Точки пронумеровали по порядку слева направо. Каково расстояние между 3-ей и 33-й точками?
в) Координата первой точки равна 10. Найдите координату 31-й точки.
г) Координата 7-й точки равна 77. Найдите координату 77-й точки.

Определение. Ряд чисел называется *арифметической прогрессией*, если разность между соседними числами одна и та же (её называют *разностью* прогресии).

4. Чему равен n-й член прогрессии, если её разность d, а первый член равен a?

5. Какие из рядов в задаче 1 – арифметические прогрессии? Найдите для таких рядов формулу n-го члена.

6. Натуральные числа от 1 до 1000 записали подряд без пробелов: 12345678910111213…
а) Сколько всего цифр выписано?
б) Какая *цифра* стоит на 333-м месте в этой последовательности?

Числовые закономерности. Зачётные задачи

ЧЗ1. Дана арифметическая прогрессия из 100 членов. Более половины её членов – целые числа. Докажите, что все числа этой прогрессии – целые.

ЧЗ2. Вокруг стола пустили пакет с семечками. Первый взял одну семечку, второй – две, третий – три, и так далее: каждый следующий брал на одну семечку больше. Известно, что на втором круге было взято в сумме на 100 семечек больше, чем на первом. Сколько человек сидели за столом?

ЧЗ3. **а)** В ряд записаны 10 чисел. Первое равно 3, последнее равно 13, а каждое из остальных равно полусумме своих соседей. Найдите 3-е число.
б) По кругу записаны несколько чисел. Каждое равно полусумме своих соседей. Докажите, что все числа равны.

ЧЗ4. Найдите формулу n-го члена для ряда 1, 11, 111, 1111, ….

ЧЗ5. Все члены арифметической прогрессии – натуральные числа. Докажите, что если продолжать выписывать новые члены этой прогрессии, то рано или поздно найдутся два члена (не обязательно соседние) с равной суммой цифр.

Группируй и считай

Листок к занятию в гр. 7А, Сириус, сентябрь 2017

Легко вычислить сумму многих слагаемых, когда все они одинаковы: сложение заменяется на умножение. А если слагаемые разные? Тогда можно попытаться разбить их на группы одинаковых.

1. В каждую клетку шахматной доски 20x20 вписали число – сколько других клеток с неё бьёт король. Найдите сумму всех записанных чисел.

А если слагаемые разные? Попробуйте разбить их на группы с одинаковыми суммами. Если это получится, то трудность подсчета перестанет зависеть от количество слагаемых. Надо только найти, сколько групп получилось.

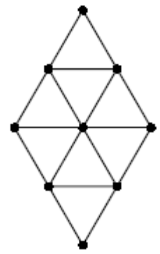
2. Докажите формулу для суммы арифметической прогрессии: $S=0{,}5(a_1+a_n)n$.

3. а) Найдите сумму $1^2-3^2+5^2-7^2+...+97^2-99^2$.
б) 7-й член арифметической прогрессии равен 77, 77-й равен 777, а всего в ней 100 членов. Чему равна сумма всех членов этой прогрессии?

4. Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем 121.

Бывает выгодно разбить слагаемые на две группы, и сосчитать каждую группу своим способом. Или добавить группу слагаемых, сосчитать, а потом от результата отнять добавленное.

5. а) Из 16 спичек можно сложить ромб со стороной в 2 спички, разбитый на треугольники со стороной в 1 спичку (см. рис). А сколько понадобится спичек, чтобы сложить такой ромб со стороной в 36 спичек?
б) Из спичек сложили клетчатую доску 30x30, разбитую на трёхклеточные уголки. Длина спички равна стороне клетки. Сколько спичек понадобилось?



Группируй и считай. Зачётные задачи

ГС1. Найдите сумму $1^2-2^2-3^2+4^2+5^2-6^2-7^2+8^2+...97^2-98^2-99^2+100^2$.

ГС2. Взяли две одинаковые колоды из 36 карт, каждую перетасовали и положили одну колоду на другую. Посчитали число карт, лежащих между каждой парой одинаковых карт: между дамами пик, между тройками червей и т.д. Чему равна сумма всех 36 найденных чисел?

ГС3. Из последовательности 2017, 2016, 2015, …, 2, 1 вычеркнули все точные квадраты (в частности, число $1936=44^2$), а из оставшихся чисел, не меняя порядка, сделали знакочередующуюся сумму 2017–2016+2015–… . Найдите результат.

ГС4. На уже огороженном поле 1км x 1км были построены дополнительные заборы, разбившие его на прямоугольные участки 5м x 20м и 6м x 12м. Какова общая длина построенных заборов?

ГС5. Вычислив сумму $1+2+3+…+N$, стёрли в ней три последние цифры. Получилось число N. Найдите его.

Длинные числа

Листок к занятию в гр. 7А, Сириус, сентябрь 2017

С длинным числом легче справиться, если в нем повторяются одинаковые короткие части.

1. Назовем натуральное число *зеброй*, если в его записи строго чередуются четные и нечетные цифры. Может ли сумма двух 100-значных зебр разной чётности быть стозначной зеброй?

2. Используя знаки арифметических действий (включая возведение в степень), скобки и цифры с общей суммой цифр не более 10, представьте следующие стозначные числа:

а) 33…3328; **б)** 166…67; **в)** 33…36667; **г)** 3636…36.

Удобнее работать с круглыми числами и теми, которые через них выражаются.

3. Стозначное число 33…3 возвели в квадрат. Найдите сумму цифр результата.

4. Представьте

а) 2016; **б)** стозначное число 20162016…2016

в виде произведения двух палиндромов. (*Палиндром* не меняется при записи задом наперёд).

Длину можно наращивать за счет несущественных частей.

5. Докажите, что есть стозначный палиндром, кратный 2^{12}.

Зачётные задачи

ДЧ1. Дима выписал числа 1, 2, 3, …, 100 подряд без пробелов. Получилось многозначное число D=1234...9899100.

а) Найдите сумму цифр числа D;

б) Найдите сумму цифр числа $2D$.

ДЧ2. Федя выписал числа 1, 2, 3, …, N подряд без пробелов. Получилось многозначное число 1234...9101112…. Можно ли подобрать N таким, чтобы это число можно было разложить в произведение не менее чем 20 различных сомножителей?

ДЧ3. В записи 2016-значного натурального числа ровно 2016 цифр, причем центральные четыре цифры – 2, 0, 1, 6 (именно в таком порядке). Может ли это число быть точным квадратом?

ДЧ4. Можно ли стозначное число 20162016…2016 представить в виде произведения двух палиндромов, чьи длины отличаются не больше чем на 1?

ДЧ5. В записи точного квадрата больше миллиона цифр. Какое наименьшее количество этих цифр может быть чётными?