Математические конструкции и их роль в преподавании математики

А.В.Шаповалов

Конспект выступления на семинаре учителей, май 2013 г

1) Креативность. Как можно определить есть у младшего школьника творческие способности к математике или нет? Надо дать ему нестандартную задачу. Почти наверняка в ней надо придумать какую-то конструкцию. Все мы помним такие задачи с детства: про волка козу и капусту, разрежь и сложи, нарисуй, не отрывая карандаша от бумаги, расставь числа в кружочке. Такие задачи легко записывать и легко проверять благодаря их наглядности. Более того, нередко школьник и сам может проверить, решил он или нет.

Напомним несколько ярких задач.

1.1. Посадите 9 деревьев так, чтобы получилось 10 прямых рядов по 3 дерева в каждом.

1.2. Разрежьте квадрат на 6 треугольников так, чтобы каждый граничил по отрезку ровно с тремя другими.

Оказывается, что умение придумать не слишком зависит от оценки по «обычной» школьной математике. И понятно почему: традиционная оценка прежде всего оценивает умение применять *заранее выученные* приёмы в более-менее *стандартных* ситуациях. Это похоже на открывание двери, и цель обучения часто понимается так: дать ученику связку из как можно большего числа ключей, и научить быстро выбирать нужный. Это, конечно, важный аспект обучения, но он не должен быть единственным, особенно при обучении математике.

Ведь в жизни ничуть не реже попадаются *лёгкие, но не стандартные* задачи, когда надо что сделать, а готового рецепта «как сделать» нет. Ну не нашлось в связке подходящего ключа, а войти надо. Придётся разобраться, а потом что-то придумать…

Решение задач на построение примеров эту способность придумывать поддерживает и развивает.

Тут есть, однако, такое возражение. Это, мол, задачи-головоломки. Какое отношение они имеют собственно к обучению математике? Ведь главное, что отличает математику от других видов деятельности – строгий стандарт доказательств. А тут придумал пример, один из многих, и доказывать ничего не надо?! Эдак не отличишь невежду от хорошо обученного школьника…

Подобные опасения лежат в основе кружковых программ, где умение строить конструкции рассматривается как своего рода «детская болезнь», от которой надо мягко, но настойчиво лечить.

Автор с таким подходом решительно не согласен. Есть, конечно, задачи-головоломки, но не о них речь. Во-первых, чистых головоломок довольно мало, и в целом в задачах на конструкции математики ничуть не меньше. Достаточно поставить вопрос «Можно ли?» или «Для какого наименьшего?» и тут уж необходимость математики при решении становится очевидной. Во-вторых, научный опыт автора показал, что при поиске доказательств в «высокой математике» созидание конструкций используется ничуть не реже, чем применение теорем. В конце концов, любое доказательство само по себе является конструкцией! Наконец, большая часть школьников, вероятнее всего, будет применять свои знания и навыки в прикладной математике, программировании, других науках и вне науки. Так давайте учить их так, чтобы им эти навыки пригодились в любом случае.

В частности, будем учить их придумывать примеры так, чтобы изобретательность как минимум сохранялась, а строгость ей не только не мешала, но чем дальше, тем больше помогала.

2) **Применимость.** Но ведь придумывать – это удел немногих. Для большинства школьников стоит задача хотя бы разобраться в том, что уже придумано. Помогут ли тут задачи на конструкцию? Да, конечно. В рамках обычной школьной программы школьников надо научить усвоенное применять. Поскольку жизнь бесконечно разнообразна, применение тоже требует изобретательности. А математические конструкции служат хорошей моделью реальных задач. Впрочем, один род задач на конструкцию в программе уже есть: это задачи на построение в геометрии.

Задачи на построение и примыкающие к ним задачи на геометрические места точек широко известны, я здесь их приводить не буду. Замечу только, что они играют важную роль: служат примером применения абстрактных знаний для достижения наглядных и конкретных целей. Ведь большинство школьников вовсе не собираются становиться профессиональными математиками, и правильно догадываются, что роль строгих доказательств за пределами математики не очень велика. Вообще, доказательства выглядят не слишком достоверными, если их результаты нельзя «пощупать руками». А если еще требования «докажите» всегда идут только от учителя, они будут восприниматься лишь как навязанный «довесок», особенно для учащихся с конструктивным складом ума. В задачах же на построение требование доказательства возникает естественно, как требование к обоснованию работоспособности алгоритма. Тем самым построения работают на достоверность.

Кроме того, демонстрируется и усваивается и мощная идея собирания из блоков: мы строим обычно не из кирпичиков элементарных построений, а из блоков – неэлементарных построений, которые мы уже научились делать ранее. Такие навыки очень нужны школьникам для программирования.

Корпус задач на построение достаточно разнообразен. Это позволяет показать работу не только любого общего приёма составления или исследования алгоритма, но и очень многие «чисто» геометрические теоремы и понятия. Последнее, впрочем, верно и для задач на конструкцию вообще.

По материалу эти задачи можно разбить на комбинаторно-геометрические, числовые, алгебраические и прочие.

Числовые конструкции обычно работают с группами чисел, иногда довольно большими. Этот навык оказывается потом очень нужным в программировании. Для целых чисел обыгрывается четность, делимость, остатки. Для произвольных чисел на первый план выходят последовательности, суммы, неравенства.

2.1. Разложите 100 орехов на 10 кучек так, чтобы в них было разное число орехов, но никакую из куч нельзя было бы разбить на две так, чтобы получилось 11 кучек, и число орехов во всех них было различным.

Комбинаторно-геометрические задачи замечательны своею наглядностью. А хороши тем, что заставляют отказываться от стереотипных путей использования привычных геометрических фактов. В отличие от классических задач, уровень трудности комбинаторных по формулировке определить почти невозможно. Учителя послабее видят в этом большие трудности, а учителя посильнее – большие возможности. Кстати, особенно трудными оказываются задачи, где возможных ответов много: при избытке свободы оказывается легче заблудиться.

2.2. Дан многоугольник и точка вне его. Верно ли, что хотя бы одна сторона многоугольника видна полностью?

Алгебраические конструкции встречаются реже. Они помогают расширять расширить представления школьников при переходе от частных объектов к общим, скажем, от линейных и квадратичных функций – к многочленам, а от многочленов – к общему понятию функции. Ведь важно показывать не только то, что есть, но и чего нет. Так, если при переходе к общему свойство исчезает, очень полезно построить контрпример.

3) Достоверность. Конструктивные задачи хороши и для преподавания математики как достоверной науки. Среди них много «двустворчатых», то есть состоящих из двух дополняющих друг друга частей, требующих двух различных методов. Скажем, задачи на оценку+пример требуют как построения примера, так и рассуждения, доказывающего оценку (и, как правило, не опирающегося на пример). Когда такие разные оценка и пример вдруг «волшебным образом» сходятся, это производит на учащихся впечатление. Тем самым в их глазах повышается достоверность рассуждения и метода рассуждения, что в целом работает на единство математики.

3.1. Клетчатую квадратную рамку 17×17 (с дыркой 15×15) разрезали по границам клеток на несколько частей и сложили из них квадрат 8×8. Каково наименьшее количество частей?

Среди двустворчатых задач выделим ещё задачи на решение игр, то есть поиск оптимальных стратегий за обе стороны. Здесь важно не только придумать хорошие алгоритмы, но и показать, что не существует лучших алгоритмов при любой игре другой стороны. Стоит отметить, что во многих случаях стратегию для каждой из сторон удобнее приводить и доказывать независимо.

3.2. На столе лежат карточки со 100 последовательными числами. Двое игроков по очереди берут по карточке пока не разберут все. Тот, у кого сумма меньше, выплачивает разность сумм противнику. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?

4) **Контрпримеры**. Для обычных уроков наибольший интерес представляют конструкции двух типов: контрпримеры к типичным заблуждениям и примеры, позволяющие с неожиданной стороны посмотреть на знакомые объекты и понятия.

4.1. Типичное заблуждение, что в русском языке нет слов с пятью согласными подряд. Приведите контрпример.

4.2. Многочлен P(x) таков, что P(1)=1, P(2)=2, …, P(100)=100. Обязательно ли P(101)=101?

4.3. Разрезав четырехугольник по любой из диагоналей, мы получим два равнобедренных треугольника. Обязательно ли диагонали перпендикулярны?

5) Неожиданный ракурс

5.1. а) Треугольник, где все углы измеряются рациональным числом градусов, назовем хорошим. Докажите, что в нем можно выбрать такую точку, что соединив её отрезками с вершиной, мы разобьем исходный треугольник на три хороших.
б) Докажите, что для остроугольного хорошего треугольника такое разбиение можно сделать не менее чем тремя способами.

5.2. Клетчатая таблица называется магическим квадратом, если все числа в ней различны и суммы чисел во всех строках и столбцах одинаковы, например:

9	5	1
4	3	8
2	7	6

Существует ли магический квадрат 3×3, заполненный числами, обратными натуральным?

5.3. Купившему головку сыра весом 3 кг магазин предлагает призовую игру. Покупатель режет головку на 4 куска, а продавец выбирает из этих кусков один или несколько и раскладывает их на одну или на обе чаши весов. При неравновесии продавец обязан за счет магазина добавить призовой кусок сыра, уравновешивающий чаши. Продавец старается сделать приз поменьше, а покупатель – побольше. Найдите вес призового куска при наилучших действиях сторон.

Ещё задачи

6.1. Арбуз разрезали на 4 части и съели. Получилось 5 корок. Как такое могло быть, если корок никто не грыз?
6.2. Разрежьте квадрат на равные треугольники и сложите из всех них два меньших не равных квадрата.
6.3. Натуральное число увеличили на 10% и снова получили натуральное число. Могла ли при этом сумма цифр уменьшиться ровно на 10%?
6.4. В бесконечной возрастающей геометрической прогрессии каждое число заменили на его дробную часть. Могла ли получиться строго убывающая геометрическая прогрессия?
6.5. Среди значений многочлена от двух переменных встречаются все положительные числа. Обязательно ли среди значений есть 0?
6.6. Разрежьте треугольник на n треугольников и прведите в каждом из них по медиане так, чтобы все медианы были равны.