

Как придумывать задачи

Лекция для учителей прочитана в декабре 2011 г. в школе-интернате «Интеллектуал» (см. <http://sch-int.ru/intel/index.php/pubotchet1011-pr11>)

Просили рассказать, как я придумываю задачи и как я учу решать нестандартные задачи. Тут конечно есть о чем поговорить, но начнем с такой более приятной темы: как я придумываю задачи. При этом я сам не понимал, как я это делаю, хотя придумывал задачи я давно, сколько я себя помню. Только я никогда не знал, что это кому то нужно. Приехал Сергей Иванович Токарев, с которым я работал на одной кафедре, и спросил: «нет ли у тебя какой-нибудь задачки олимпиадной?», я сказал, что есть, конечно. Начал давать ему разные задачки, в начале их, конечно, брать не очень хотели, потому что я не умел их причесывать, а потом я научился их причесывать, научился заворачивать их в красивые обертки и они пошли.

Но, а придумываются задачи либо от сюжета, либо от метода.

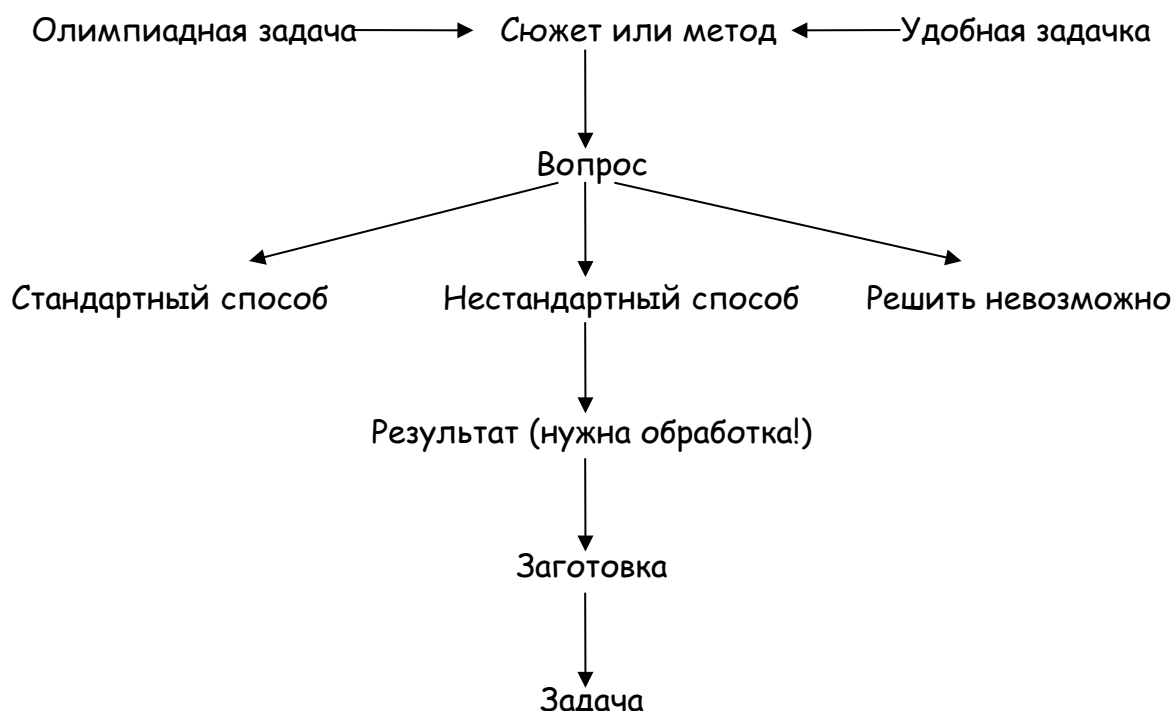
Сюжет или метод решения.

Придумывается сюжет, на сюжет придумывается вопрос, и на вопрос начинаешь придумывать ответ. Тут возможно 3 варианта. Стандартный способ, это не интересно, тогда это не задача, а пример. Другая крайность это решить невозможно. И наконец, самый интересный случай, это нестандартное решение. Здесь уже есть предмет для рассмотрения. Стандартное, нестандартное это уже субъективная вещь, зависит от того, кому задача адресована. Для одних это будет нестандартная, для других стандартная. Как раз то что для взрослых считается стандартным, для детей маленького возраста считается нестандартным. В общем, когда я понимаю, что для детей это будет нестандартное решение, уже возникает то, что я называю результатом. Конечно, если мы задали вопрос, и у нас возникла одна из крайних ситуаций, то это не значит, что ничего не годится. Это значит, надо изменить вопрос, если изначальный сюжет представляется достаточно интересным, почему бы не задать другой вопрос или третий. И тогда из одного сюжета может появиться несколько задач, обычно так и получается. Во всяком случае, когда меня попросили придумать задачи для турнира городов, там же целая цепочка развивающихся вопросов, мне это вполне удавалось.

Но вот возник результат. Чем, с моей точки зрения, результат отличается от задач? Тем, что с точки зрения математики это некоторый факт, некоторый метод, но обертки не хватает. Чуть далее на примере покажу. Это еще не готовый продукт, это полуфабрикат. Нужно его как то обработать, иногда улучшить, иногда изменить формулировку, может какие-то цифры изменить. А если удастся придать заготовке красивую, яркую форму, вот тогда возникает задача. Процесс многоплановый. Вопросы возникают неоткуда. Задаешь себе вопрос, потом получаешь ответ и вот тебе готовая задача. Но чаще всего конечно так же как стихи, они не рождаются в готовом виде, человек начинает

их обрабатывать. Там слово заметин, здесь рифму подберет. И постепенно получается задача.

Давайте составим схему:



Давайте посмотрим пример. Я вам раздал листочек с 12 моими задачами, давайте посмотрим на задачу про незнайку, задача №8.

1. Перед началом чемпионата школы по шахматам каждый из участников сказал, какое место он рассчитывает занять. Шестиклассник Ваня сказал, что займет последнее. По итогам чемпионата все заняли разные места, и оказалось, что все, кроме, разумеется, Вани, заняли места хуже, чем ожидали. Какое место занял Ваня?
2. В XIX и XX веках Россией правили 6 царей династии Романовых. Вот их имена и отчества по алфавиту: Александр Александрович, Александр Николаевич, Александр Павлович, Николай Александрович, Николай Павлович, Павел Петрович. Один раз после брата правил брат, во всех остальных случаях - после отца сын. Как известно, последнего русского царя звали Николаем. Восстановите порядок правления царей.
- 3 а) Три жулика, каждый с **одним чемоданом**, хотят переправиться через реку. Есть трехместная лодка, место может быть занято человеком или чемоданом. Никто из жуликов не доверит свой чемодан спутникам в свое отсутствие (хотя готов оставить

чемодан на безлюдном берегу). **Только один из жуликов умеет грести.** Как им всем

переправиться вместе с чемоданами?

б) Три жулика, каждый с **двумя чемоданами**, хотят переправиться через реку. Есть трехместная лодка, место может быть занято человеком или чемоданом. Никто из жуликов не доверит свой чемодан спутникам в свое отсутствие (хотя готов оставить чемоданы на безлюдном берегу). Как им всем переправиться вместе с чемоданами?

- 4 а) Отметьте ровно по одной букве в каждом из слов данной задачи так, чтобы среди

отмеченных букв не было бы повторяющихся.

б) Докажите (не используя длинного перебора), что нельзя отметить ровно по одной букве в каждом из слов данной задачи так, чтобы среди отмеченных букв не было бы повторяющихся.

- 5 Три друга гонят самогон, каждый своим аппаратом. У Труса течет жидкость крепостью a градусов, и стандартная бутылка наполняется за a часов; у Балбеса соответственно - b градусов и за b часов, у Бывалого - c градусов и за c часов. Для ускорения процесса друзья направили все шланги в одну бутылку и наполнили ее за сутки. Какова крепость смеси? (Примечание для непьющих: крепость - это процент содержания спирта).

- 6 Есть три сосуда 3л, 4л и 5л без делений, кран с водой и 3л сиропа в самом маленьком сосуде. Как с помощью переливаний получить 6л смеси воды с сиропом в пропорции 1:1?

- 7 На гранях куба написаны натуральные числа, а в каждой вершине - произведения чисел на трех гранях с этой вершиной. Найдите сумму чисел на гранях, если сумма в вершинах равна 70.

- 8 На Луне имеют хождение монеты достоинством в 1, 15 и 50 фертингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил сдачу на одну монету больше. Какую наименьшую сумму могла стоить покупка?

- 9 У продавца и покупателя в сумме 1999 рублей монетами и купюрами в 1, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000 рублей. Кот в мешке стоит целое число рублей, причем денег у покупателя достаточно. Докажите, что покупатель сможет купить кота, получив причитающуюся сдачу.

- 10 У правильного m -угольника и у правильного n -угольника равны радиусы описанных окружностей. Докажите, что n -угольником можно накрыть m -угольник $\Leftrightarrow n$ делится на m .

- 11 Дорожки парка идут вдоль краев двух квадратных газонов с одной общей стороной. Вокруг газонов (каждый вокруг своего) против часовой стрелки гуляют с постоянными скоростями Ватсон и на 20% быстрее него Холмс. Время от времени они встречаются на общей дорожке. Во второй раз они

встретились через 10 минут после первого, а в третий - через 10 минут после второго. Через какое время они встретятся в 4-й раз? (А.Шаповалов)

- 12 В море плавает предмет (айсберг), имеющий форму выпуклого многогранника. Может ли случиться, что 90% его объема находится ниже уровня воды и при этом больше половины его поверхности находится выше уровня воды?

Началось все с вопроса: а может ли он получить на сдачу больше монет, чем он заплатил? Вопрос не очень интересный, но возможный, все зависит оттого, какие монеты есть.

Вот как бы возникла такая ситуация, почти стандартная. Может ли для маленьких школьников она и нестандартная, но для взрослых людей вполне нормальная. Я начал менять вопрос, фиксировать какие-то монеты. И начал ставить вопрос, какая минимальная стоимость этой покупки? При разных получал все время 1, и это было не интересно, и вдруг перестала получаться 1, а стало получаться, если монетки стали 1, 8 и 50. Решение, правда, было переборное. Перебором всех случаев было понятно, что меньше 6 невозможно. Но пока это было не очень интересно. Нет яркого решения. Что такое идеальная задача? Короткий вопрос, неочевидное короткое решение и в общем неочевидное решение. Конечно, к идеалу приблизиться довольно трудно, но тем не менее к этому хотелось бы стремиться. У результата вопрос был, ответ не очевиден, но нет короткого яркого решения. Далее следующий шаг обнаружилось короткое решение, обнаружилось закономерность. Почему все эти числа, 1, 8 и 50. А все они имеют остаток 1 при делении на 7. Тогда возник вопрос, а если посмотреть это все по модулю 7? И да, тут вылезает вполне аналогичное решение, поему меньше 6 не может. У нас остаток меняется в ту сторону и получается, что покупка должна иметь остаток 6 по модулю 7. Значит, меньше 6 быть не может. И наконец, последний штрих, который позволил превратить это все в задачу, это удалось найти яркую формулировку. 8 заменилось на 15, а 15 это вполне реалистичная цифра. Т.е. вот как отшлифовалась, родилась задачка. Из очень простенького вопроса, очень простенького решения. А сколько времени на это тратишь? Как получится. Если сюжет интересный, можно неделями думать, если не интересный, то быстро бросаешь. Вот такой пример.

Что еще можно сказать про хорошую задачу? Надо подумать, что от неё хотеть. Кроме того, что есть, надо, что бы в задаче было маленькое чудо, по словам Миши Берштейна. Т.е. задача должна показать больше, чем она внешне обещает. Потому-то если просто поставить вопрос: какое количество ферзей можно расставить на шахматной доске с таким то условием, понятно, что наибольшее число точно есть. Но если вдруг это число, оказывается, сильно отличается от ожидаемого, то тогда чудо вдруг возникает. И если решение оказывается сильно короче ожидаемого. Т.е. естественные соображения опровергаются, каким-то таким коротким ходом, и друг все получается на много лучше. Если в задаче есть изюминка, значит это хорошая задача. Что

почти необходимо в олимпиадных задачах. Время от времени мы должны для балансировки варианта давать что-нибудь такое проходное, чтобы сбалансировать. Но все такие это не самое лучшее. Но не надо забывать, что кроме олимпиадных задач у нас бывают учебные задачи и здесь изюминка может помешать. Некоторое количество задач с изюминкой надо, но надо и просто задачи, хорошо иллюстрирующие метод.

Меня сегодня учили, как покупать подарки. Как опытные женщины ходят? Ага, какая интересна штучка, Иван Петровичу на юбилей и не важно, что он чрез полгода. Сейчас куплю. Так и с задачкой. Складируют, а потом в нужный момент доставать и предъявлять.

Каждая задача имеет свою цель, и некоторые достоинства превращаются в недостатки и наоборот.

Другой пример: мы все любим, что бы было компактное решение, что бы было удобно проверять на письменной олимпиаде. А теперь представим, что мы математический бой сформировали из таких же задач, где четкое решение, либо есть либо нет. Четко определяется. Вопрос: что тогда обсуждать у доски? Нужно вставить такие задачки, что было немного тяготно, что бы было на чем терять баллы, было что обсуждать. Нужны менее изящные, коварные задачи. Опять-таки, мы не берем на олимпиадах задачи с подвохом, потому что даже сильный человек может увлечься и попасться. И, наоборот, на матбою такие вещи незаменимы, задачи с подвохом.

Давайте посмотрим, какие задачи я придумывал от сюжета, а какие от метода. Первая от сюжета. Вторая, четко от метода. Задача с чемоданами, это четко от сюжета, захотелось придумать новую формулировку задачи с переправой. Школьники порешали, кажется, что там 2-3 задачи, а потом бах, возникает задача с переходом мостика с фонариком. Все такие Ах. Захотелось придумать, удалось.

4 - от метода, возникает известная вариация леммы Холла о свадьбах. Такой неожиданный сюжет. А и Б 2 разные задачки, которые внешне противоречат друг другу, хотя конечно противоречия никакого нет. На примере первый 4 я продемонстрировал, дальше будем возвращаться.

Чем хороша задача от сюжета? Очень ценятся такие задачи с точки зрения обучения по многим причинам, я потом их назову.

Очень я люблю задачки, в которых условие даже немного сбивает с толку. Ведь опытный школьник задачу читает задачу про дороги и города и сразу думает, ааа, это же задачка легкая, все-все знают. И это, на мой взгляд, немного не способствует обучению. Как бы школьник перемигивается с учителем. А я бы хотел, чтобы школьники первым делом вчитывались в задачи, анализировали, разбирались, что и как, внутренние связи обнаруживали. И исходя уже из этих связей высматривали аналогии с другими задачами и так далее. Как неопытная учительница объясняет детям в первом классе: дети, если птички прилетели, то надо прибавлять, а если улетели, то надо отнимать. И потом даешь какую-нибудь задачку, где птички улетели, а надо прибавлять. И

дети совершенно суются с толку. Так и это, если их слишком долго приучать, что формулировка задачи дает намек на способ решения, то они начинают в них путаться. Я этого не люблю. Я люблю придумывать такие задачи, где совершенно непонятно на что. Но пример такой задачи, где есть единство и борьба противоположностей, это задачка №10.

Вопрос такой, на что задачка, на делимость или на геометрию? Здесь, по крайней мере, явно сформулировано. Но непонятно, как можно делимость с геометрией совмещать. Если думать не начнешь.

Еще более хитрая задачка, это задачка №11. Стоит нарисовать картиночку, что было понятно.

Ну и понятно, что время от времени, они встречаются на дорожке. Станным образом ко мне сразу в голову пришла идея с этими цифрами, и оказалось, что они очень хорошо подобраны. Возникает вопрос, на что эта задачка? Внешне, это задачка на движение. Уважаемый составитель вариантов решил, что надо вставить в олимпиаду эту задачку, как легкую задачку на движение. К сожалению, эта задачка в итоге пропала, потому что от движения там требуется мало чего, задачка на совершенно другое. И, к сожалению, из школьников 7 класса её никто не решил. Её не каждый 8-микласник решить. А если начать писать уравнения, то получится полный гроб. С уравнениями я её точно решать не могу.

Это была устная олимпиада 7-х классов на летнем турнире кванта.

И еще такая интересная задачка, непонятно на что, это задачка №5. Внешне она выглядит как задачка по алгебре. Вы можете подумать, как она решается, могу только сказать, что в ответе не используется значения ни a , ни b , ни c и откуда числовой ответ возникает, кажется совершенно неожиданным, потому что в задаче нет ни одной цифры. Ответ 72° . Важно, что одинаковое количество градусов, за счет этого буквы сокращаются.

Такие задачи особо ценятся, но совсем такие удаются крайне редко. Еще я люблю задачи такие, где используется умение конструировать, ведь это очень важная вещь. В конце концов чистыми математиками станет меньшее число наших учеников и не математики справедливо иронизируют над желанием математиков доказать, что что-то существует и предъявляет конкретный объект. Поэтому я не очень поощряю доказательство от противного так, где без него можно обойтись. Я считаю, что конструкция это первичное. Мы идем от конструкции и анализа первичного, как можно лучше, быстрее, экономнее.

И еще мне очень нравятся задачи, где в ответе возникает очень знакомый объект, но ты на него смотрим совершенно непонятными глазами. Это нормальное свойство умного человека. Придумывать нестандартные решения.

И в качестве такого примера я считаю удачной задачку №12.

Есть такой автор задач, Саша Грибалко, он начал придумывать задачи еще в школе, и я помню, на каком-то турнире мы его взяли в жюри. Мы ему дали задачку, он не мог её решить, мучился, мучился. Потом говорим, даем наводку, это задача Токарева. «Ну, тогда очевидно».

Я против этого, но для каких, то школьников эта информация может послужить отвлечением, а для кого-то наводкой. Пусть просто решают.

И так, хорошо. Я думаю, что немного осветил вопрос, как задачи придумываются. Считаю, что на самом деле здесь более мене любой опытный педагог сможет придумать задачу, повернуть содержательный вопрос так, что бы школьникам это было интересным. Причешешь и смотришь, уже задачка годится для урока, а иногда и для олимпиады.

Недавно мы обсуждали с моим коллегой, он пишет книжку по принципу Кавальери и мы с ним стали говорить. Я говорю: «Принцип Кавальери, конечно, мы школьникам не докажем без интегралов, потому что его интересно изучать до того как интегралы возьмут, но нужно его мотивировать как-то. Давайте значит порешаем задачки, которые с принципом Кавальери как-то связаны на плоскости».

- (коллега) Но на плоскости, же нет задач, которые решаются с помощью принципа Кавальери.

Но, во-первых, они есть, а во вторых кто, же заставляет решать задачи принципом Кавальери? Наша цель другая, убедить, что принцип Кавальери работает. Есть разные задачки, можно два прямоугольника одинаковой площади расположить так, чтобы сечения некоторым пучком параллельных прямых будут одинаковыми. Пусть они это докажут, пусть докажут, что если сечения двух выпуклых многоугольников равны, то тогда площади равны. Вполне содержательная задачка, то есть повозиться можно. А если уж определять с помощью принципа Кавальери, площадь фигуры ограниченная двумя параболой. Мы же знаем, что если интеграл вычитать две параболы, там получается линейная функция и её проинтегрировать. То же самое, возьмём две параболы, проверили, а линейная функция это равносильно трапеции, а трапеция равно площади. Нет проблемы придумать задачу если вопрос содержательный, то есть она будет не такая яркая, но это вполне нормальная учебная задачка. Я думаю, что вы все это сможете, не бойтесь, тренируйтесь.

Теперь, как учить решать нестандартные задачи, но прежде чем учить, сразу начнём с вопроса: зачем учить нестандартным задачам? Почему вы считаете, что нестандартные задачи нужно учить?

Ну, потому что в нашей жизни постоянно встречаются нестандартные задачи, на каждом шагу. Правильно, это совпадает с моим мнением, что легкие, но нестандартные задачи встречаются чаще, чем тяжёлые, но стандартные. Может, конечно, сложные и несложные стандартные задачи встречаются регулярно, но они не воспринимаются как задачи. Надо добраться отсюда, сюда, мы всегда знаем, как ехать, а как задачу решить, я думаю только когда, закрыли переход на метро Октябрьская. Это одна из тех вещей. Есть ещё одна важная вещь, кроме всего прочего, какова цель обучения математики, чему мы хотим через математику научить? На этот вопрос, один мой знакомый сказал: «мы их учим создавать математическую модель некоторой ситуации, это ровно то что всем

кто будет работать нужно в первую очередь потому что когда ты составишь хорошую математическую модель, то есть масса справочников, есть математики, есть компьютерные программы, которые эту модель смогут решить, обчислить, но вот составить содержательную модель, не упустить ключевых связей, может только человек, который является специалистом в той области, в которой эта самая модель нужна. Этим вещам мы и должны учить. И именно такая вещь на нестандартные задачи, потому что стандартная задача предполагает, что модель туда уже встроена. Сосчитать сколько будет $2+3+5$, то тут уже модель есть, а в нестандартной её надо построить. А как эту модель построить? Нужно посмотреть, и выявить существенные связи, проанализировать. За счёт чего это можно сделать? Самое традиционное, это, в первую очередь, аналогия. Только проанализировав связи по существу, ты можешь построить содержательную аналогию, увидеть сходство ситуаций, с другой ситуацией. Кто такой тополог? Тополог - это такой человек, который не отличает кошку от бублика, потому что и там и там есть дырка, а всё остальное для него несущественно. Нужно научить людей, правильно отбросить несущественное, в первом классе, сказать, что несущественно складываем мы яблоки или груши, это делается по тем же законам, в старших классах ещё что-то такое, а существенное сохранить.

- (ПИБ) Дело в том, что вот говорили про жизненные задачи, они стоят открыто, как решить какую-то проблему? У этой проблемы может быть куча правильных решений. Надо сформулировать задачу, которую потом решать. Один и тот же вопрос можно решать с помощью разных моделей и эффективно решать. Когда мы учим детей олимпиадным задачам, мы им уже даём начальные входные условия. Определённые исследовательские навыки у них развиваются, но список навыков, он намного шире. Получается некоторое противоречие, например, я, знаю девочку, которая на Московской городской олимпиаде получила задачку про футболистов, как расставить на поле футболистов, чтобы были одни расстояния. Эта девочка сидела, она быстро догадалась, что футболистов надо было поставить на прямой, но потом её заинтересовал вопрос, а можно ли на плоскости их расставить? И она сидела до конца олимпиады, она решала намного более сложную задачу, доказала что нельзя, но так как решила одну, что было совершенно ненужно, то она ничего за это не получила. Другой пример, это один выдающийся математик, он получил первую премию не за то, что он решил задачу, он не решил ни одной задачи, но у него возник вопрос, и он понял, что он чего-то не понимает, и вот за то, что он её не решил, он получил первую премию. Поэтому говорят, что многие люди, которые хорошо решают олимпиады, они в науке никак, потому что они сориентированы только решать задачи, а вот придумывать другие они не могут. Поэтому, да, нестандартные задачи развивают определённые навыки, но они не видят других задач. Я могу решить любую задачу, но он не одной задачи, не может придумать себе.

- (Шаповалов) На самом деле, возражать против этого бессмысленно. Ещё одна цель, которую я всегда преследую, при изучении математики, это первым делом стараюсь изжить задачи с однозначным ответом. Я стараюсь давать задачи, где много ответов, а уже математический подход состоит в том, что если даже ответ один, то я обязательно ставлю вопрос, а почему здесь только один ответ? Почему здесь не годятся другие ответы? Ведь, в принципе, возможно много ответов. Когда мы говорим, сходи в магазин и купи хлеб, никто не говорит, что только в этот магазин и только этот сорт хлеба, ты сам должен сообразить, куда пойти. Нестандартные задачи имеют то большое преимущество, уже хотя бы в этом отношении, даже ограничивая, что путей много и там нет одно единственно правильного пути.

- (ПИБ) Я согласен, что многие навыки нестандартные задачи формируют, но если только сориентировать на это человека, то он в принципе мог бы их решать, но он не привык ставить вопросы.

- (Шаповалов) Как известно, докторскую диссертацию можно защищать двумя способами, решить нерешённую проблему, или поставить свою проблему, и развить новую область, и то и другое хорошо. Я с удовольствием давал задачи на конференцию турнира городов. Я даже давал задачи, у которых не знал окончательного ответа. Очень был рад, когда школьники придумывали содержательное обобщение и решали. Тут я с вами полностью согласен, но у нас тема более узкая «Зачем мы решаем нестандартные задачи?». В том числе для школьников, вначале на очень низком уровне, нестандартные задачи являются задачами, в которых ответов несколько.

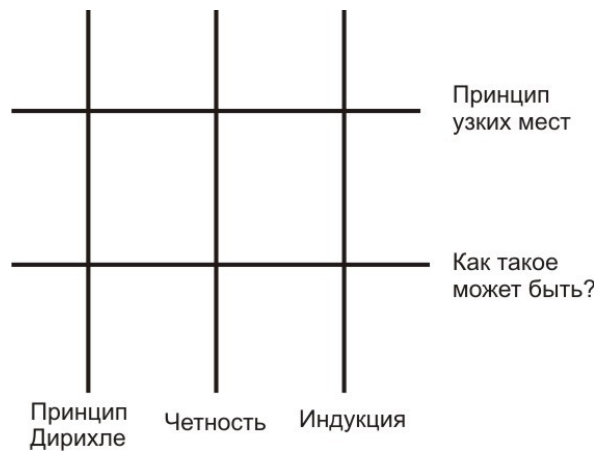
- (кто-то) Есть ещё одна причина: нестандартные задачи интересны учителю, а если ему не интересно, то, что он преподаёт, то ученикам и подавно.

- (Шаповалов) Это конечно. Даже стандартную задачу хорошо бы подать так, чтобы её было интересно решать, потому, что это известный психологический закон, у детей он особо ярко проявляется. Ребёнок на некоторые вопросы не отвечает не потому, что он не может на них ответить, а потому, что они кажутся ему бессмысленными. Даже, самый маленький ребёнок старается избежать ответа на вопрос «кого ты любишь больше, папу или маму?», потому что вопрос бессмысленный и провокационный, прямо скажем. Я считаю азами, то, что делает учитель, это должно быть интересно ему. Я начинал как учитель, обучая собственных детей, поэтому интерес к математике я им привил, хотя пока что ни один из них не стал математиком, и видимо никаким крупным научным сотрудником уже не станет, но и, слава богу. Пусть лучше занимаются чем-то другим с удовольствием. Но они все с удовольствием вспоминают, то время, которое они провели в летних школах, соревнованиях. Вернёмся, как можно научить решать нестандартные задачи, если они по определению нестандартные? Никакого другого способа, как увидеть общее в очень непохожих задачах, нет. Научатся видеть люди общее между бубликом и кошкой, значит, они чего-то превзошли в топологии, научились они видеть они там в других ситуациях, значит, они смогут применять решения одной задачи

для другой. То есть, нужно искать методы, а не отмычки, потому что опять же, типовой способ решения задач, вот очень часто даже и хорошие тренеры, они говорят: посмотри внимательно, задача решается таким и таким способом. Начинаешь пробовать, достал связку ключей, первый не подошёл, второй не подошёл, и т.д. И так потренировали школьников на кружке решать инвариант, и они с лёгкостью бьют тех школьников, которым не повезло на кружке изучить про инвариант. Поэтому какие-нибудь чистые задачи про инвариант я стараюсь вставлять только в турнир математических боёв, где чётко известно, что есть специалист по тому, есть по этому, что бы хоть как-то поощрять командную работу. Другое отношение к инварианту, да инвариант это великая идея математики, но если ты начинаешь учить инварианту не планируя, потом рассказать какую-нибудь крупную математическую задачу, то ты напрасно тратишь время своё и ученика, это обман. Конечно же, в первую очередь нужно учить таким значимым методам, которые лежат на границе математики и общей интеллектуальной деятельности. Как я уже сказал, аналогия, ещё что-нибудь такое.

Более эффективно, когда школьники сами эти методы открывают. Их все время надо поощрять. Самим придумывать методы. Мне нравится шутка «Он был настолько неграмотен, что сам придумывал цитаты из классики». Вот когда вы смотрите на проблему сверху, вам не надо знать схему тропинок. Если вы сверху, но вам все видно. Здесь поворот направо, здесь поворот налево. Научите смотреть на задачу сверху и тогда человек сам будет придумывать эти неожиданные повороты. Ну а как научить? Если вы хотите, что бы человек говорил на иностранном языке, надо заставлять его говорить на этом иностранном языке. Если вы хотите, что бы он решал задачи, значит надо в первую очередь научить решать задачи. Т.е. мой любимый метод, по возможности, иногда с коротким предисловием, иногда без предисловия, сразу давать листочек с задачками. Ребята решают, порешали, пообсуждали, прокомментировали на доске. Где я комментариями пытаюсь сразу привести к более общему контексту. Следующую задачку порешали, у кого-то не получилось, дал подсказку. Опять обсуждаем, как она сочетается с предыдущей?

Постепенно ткется ковер и задача каждая не сама по себе, а в некотором контексте, в связях с другими задачами. Этим и отличается умный человек от дебила, у него мозг тот же, может даже меньший по объему, только связей в нем больше.



Почему этот метод еще работает? Как убедить начальника в чем то? Надо прийти к нему и провести беседу так, что бы начальник сам предложил то, что вы хотите. Надо подвести так, что бы его озарило. И тогда он с удвоенной энергией прикажет это делать и все такое. И все будут довольны. То же самое в школе, когда он сам открыл этот метод, у него гораздо больше удовольствия и желания его применять. Он применит его, даже если вы сами его расскажите. Но нормальные знания очень редко идут от общего к частному. Нормальный человек учится от частного к общему. Раз пример, два пример и тут оп, возникает общая картинка.

Но, а какие методы, какие группировки? Я очень люблю группировать задачи, которые по общности. Какие-то общности я изобрел сам, какие-то узнал из книг.

Мне очень нравится такая общность, мне недавно пришла она в голову, давайте я Вам раздам листочки. Глядя на задачи, задайте себе вопрос, как такое может быть? Казалось пустяковый вопрос, хотя очень многие такие вопросы не задают, а если задать, то все очень здорово получается. Здесь уже далеко не мои задачи, но давайте посмотрим на первую задачку.

Как такое может быть?

Придумать, раскручивая

1. Арбуз разрезали на 4 части и съели. Осталось 5 корок. Как такое может быть, если корок никто не грыз?
2. Числа a, b, c нечетны и не являются точными квадратами. Может ли произведение $a^b b^c c^a$ быть точным квадратом?
3. Руслан, Жора и Денис сдавали 10 задач. Большинство задач Жора сдал раньше Руслана, Руслан - раньше Дениса, а Денис - раньше Жоры. Как такое могло быть?
4. Можно ли разрезать какой-нибудь треугольник на четыре выпуклые фигуры: треугольник, четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник?

Понять, как такое могло быть, и использовать это

5. а) Существует ли натуральное число n такое, что у n и $n+2009$ одинаковая сумма цифр?
 б) Тот же вопрос про n и $n+333$?
 в) Оцените снизу количество пятизначных n таких, что у n и $n+9$ одинаковая сумма цифр.
6. Незнайка пытался уложить 9 монет в клетки квадрата 3×3 так, **чтобы** их веса образовали магический квадрат (в каждом ряду из трех клеток - по вертикали, горизонтали и двум диагоналям - сумма весов была одной и **той же**). Повозившись, он со вздохом сказал, что восемь сумм точно равны между собой, а девятая то ли равна им, то ли чуть меньше. За какое наименьшее число взвешиваний можно на чашечных весах без гирь найти ряд с отличающейся суммой или убедиться, что такого ряда нет?
7. Барон Мюнхгаузен каждый день ходил на охоту, а возвратившись, говорил: «Сегодня я убил уток больше, чем позавчера, но меньше, чем неделю назад». а) Могли ли его слова 7 дней подряд быть правдой? б) Какое наибольшее число дней подряд эти слова могли быть правдой?
8. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = 85^\circ$, $\angle B = 115^\circ$, $AD = BC$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке M . Найдите $\angle MAB$.
- (кто-то) Что значит придумать, раскручивая?
 - (Шаповалов) Я сейчас поясню, очень многие задачи решаются, как бы сказать, методом вглядывания в туман. Или как раньше, кладешь фотографию в проявитель, сначала ничего, потом начинает, что-то брезжить, смотришь и все.

Начинаешь смотреть и искать связи. Сейчас так решают геометрические задачи. Очень часто удается анализировать то, что на первый взгляд не поддается анализу. Отсюда все и получается.

В первой задачке, арбуз разрезали на 4 части и съели. 4 части 5 корок. Дальше принцип Дирихле.

Я все время стараюсь подчеркивать, что детей надо научить абстрагироваться от действительности в математике, я готов на высоком уровне. Сначала их надо учить, что общие методы размышления вполне применимы в математике. Эта ситуация вполне аналогична житейской ситуации и ничего в этом плохого нет. Если ты связываешь понятия математики и жизни, то ты углубляешь понимание и математики и жизни.

Задача 2 конечно чисто математическая, но хотя все равно можно проанализировать. Те, кто, конечно, знают метод разложения на простые множители, они моментально решают эту задачу, хотя даже и неведущий человек может в этом разобраться.

Те, кто решил 2-ую задачку, поднимите руку, пожалуйста.

- (ПИБ) Можно вопрос, а сколько лет детям, с которыми вы эти задачи решаете?
- (Шаповалов) 10 класс. Я решил, что для 10-классников надо начать с этого.
- (ПИБ) Можно еще вопрос? Вы сами сказали, что надо от частного к общему идти. Возможно ли не отработывая частных способов решения, тот же инвариант, принцип Дирихле, четность, переходить к общим методам. Был ли у вас опыт детей с 0 обучать общим методам?
- (Шаповалов) Сейчас скажу, хороший вопрос. Примерно так, в 7-ом классе, я считаю, что надо чередовать. Одни и те же задачи могут пойти и в это занятие и в это занятие.
- (ПИБ) Т.е. чисто вы не давали?
- (Шаповалов) Да, на самом деле, общие методы должны незримо присутствовать в каждом занятии.
- (ПИБ) На самом деле достаточно сложно заставить ребенка решать какими-то общими методами, когда он частные не отработал.
- (Шаповалов) Это правда, но общий метод, я бы не назвал его общим методом, это скорее принцип или подход. Если методы, а есть принципы. Принципы сами по себе не рекомендуют, что надо сделать.
- (ПИБ) Дети не склонны проникаться этими принципами, если нет базы отработанных задач.
- (Шаповалов) Конечно.
- (ПИБ) Тут более уместно людям, которые уже порешали нестандартные задачи, когда у них есть уже какая-то база, уже по новому перекрыть пространство представления, т.е. завести связи, которые они пока не видели.
- (Шаповалов) Есть некие подходы, которые я прямо не изъясляю. Мы что-то изучаем, а вопросы «как такое может быть?» я задаю по ходу, я не говорю, что это метод. И я говорю, что видите, тут у нас возникло препятствие, а вот тут. Мы как бы проходим через узкое место, но не фиксируем. Делаем это неявно. Это даже с традиционными методами хорошо. Вы изучаете четность и где то там чуть-чуть коснулись принципа Дирихле. Коснулись и ушли. А уже когда доходит до принципа Дирихле, оказывается, что у них уже какая-то наработка была. А вот помните, там была такая задачка, а вот помните там была такая штука, было все элементарно, но вот все-таки. Т.е. все время погружаешь их в более широкий контекст. Но не передавливаешь. Конечно, сейчас мы изучаем четность, все внимание на четность. Но вскользь.
- (ПИБ) А когда они созрели, вы переводите это в явную форму?
- (Шаповалов) Да, действительно. Сначала идет то, что называется пропидектика, по чуть-чуть. Потом явно, а потом повторение. Принцип Дирихле маленькому совершенно незаменим, он применяется еще до метода от противного и до оценок. У него еще техники нет работы с неравенствами, а принцип Дирихле уже может понять. У него еще технике нет рассуждать от противного, а принцип Дирихле ему еще понятен. Это та база, на

которой все стоит. Да, он очень частный способ, но эта та частность, из которой вырастает общность.

- (ПИБ) Еще можно вопрос? Вы говорили, что вы раздаете детям листочки, дети решают задачки. Возникает вопрос, я просто спрашиваю, мне это надо, дети решили, они решили своим кривым способом, Вы потом при разборе показываете этот, пытаетесь отстоять другой. А им даже не интересно слушать, зачем? Ч уже решил задачу, зачем другим способом, она же уже решена.

- (Шаповалов) Такие споры возникают регулярно.

- (ПИБ) И при этом его способ родной, он сам его придумал, он свой поддерживает, а ваш отвергает.

- (Шаповалов) Вы даете следующую задачу, которая его способом не решается, а вашим решается. И вот тут-то, он начинает задумываться, что же это: «я вот не решил, а они решили все?».

- (ПИБ) Следующая проблема возникает: он свой способ освоил, а ваш он не освоил, он его не может применять. Для тех задач, которые вашим способом решаются легко, он его решает своим, но тяжело, а ваш он всё равно не осваивает. Когда вы даёте задачу, которая его способом не решается, он не может её решить и Вашим способом, потому что он его не освоил. Тупик.

- (Шаповалов) Это означает на самом деле некоторую, что человеку нужно чуть-чуть индивидуально поработать, потому что понятно, что не хочет человек принципиально двигаться в общем потоке. Если тебе дали тетрадь в линейку, пиши поперёк. Всё это чуть-чуть поворачиваешь, и он сам выворачивает и начинает рваться.

-(ПИБ) Но как это сделать для всех?

- (Шаповалов) Если у вас тридцать человек, то я вам не могу подсказать, как с ними одновременно заниматься этим.

- (ПИБ) Есть старый способ, который освоен, который даёт результаты, новый способ, его тяжелее применять для этих, но старый срабатывает, поэтому он тут не применяется, а на задачах где уже новый способ срабатывает, они их не решают, потому что они новый не освоили, а старый уже не работает.

- (Шаповалов) Это некоторая индивидуальность у человека, если человек умный, и вы ему продемонстрировали, что вот она задача, вашим способом она решается элементарно.

- (ПИБ) То есть показать и снова вернуться давать такие же задачи, но обучать удобнее на более лёгких задачах, а как только мы начинаем давать более лёгкие, начинает срабатывать предыдущий способ.

- (Шаповалов) А вот здесь, должна срабатывать ваша изобретательность, придумать такие задачи, которые его способом совершенно не решаются, а с вашим способом решаются легко. Для этого нужен запас задач и некоторая изобретательность, без этого конечно тяжело.

- (ПИБ) А какие у вас общие способы?

- (Шаповалов) Сейчас скажу, нет к сожалению. Я опубликовал книжку, сейчас я немного завяз на книжке «10 турниров городов», но вот там мы составляем перечень группировки задач по разным методам.
- (ПИБ) Желательно пояснения к ним. Потому что принцип узких методов я смотрел.
- (Шаповалов) Я думаю, что вот эта лекция самая первая, где мы обсуждаем эти вопросы. И судя по диалогу интерес, есть и об этом надо писать.
- (ПИБ) Общий подход у Поя реализован.
- (Шаповалов) У Поя да.
- (ПИБ) Остальные, это уже частные.
- (Шаповалов) Поя в другое время и в другой обстановке писал. Сейчас уже сложнее.
- (ПИБ) У Вас другой подход. Поя делает вот так, Вы иначе, но все равно интересно.
- (Шаповалов) Об этом конечно надо писать. В свое время я писал довольно интересную статью, где описывают систему образования в СССР, но он уехал в 80-х годах. А то, что произошло в 90-х годах можно назвать переворотом. Как только упало давление государства, как только чиновникам стало не до нас. Вдруг расцвели турниры математических боев и так далее. Возникла совершенно новая субкультура. И уже подводить какие-то итоги. Уже много чего выросло. Когда работаешь в Кировском летнем лагере, все время ощущаешь себя впереди, там же есть группа «профи», выбирается половина лучших людей России вот в этом возрасте. И с ними нельзя повторять то же самое, каждый раз надо изобретать, что-то новое. Я говорю как с людьми, интересующимися психологией преподавания математики. Зачем вы делаете опыты с 6-тилетними, я конечно понимаю, что эти опыты легко интерпретировать, но вы бы пришли и посмотрели что мы делаем, а потом бы со своей психологической точки зрения посмотрели. Может дали бы нам какие-то советы, может, мы делаем какие-то глупости. А может, от нас почерпнете. Поскольку это как то сходится, начинаешь с коллегами говорить «да, да, да», каждый понимает как собака, понимает, а сказать не может. Это не так просто предать свой опыт.
- (ПИБ) Психологи копируют вас, они должны уметь решать математические задачи, а они этого не умеют.
- (Шаповалов) Всекие бывают психологи. Тот же профессор ... он преподает и математику, у него есть публикации, и задачи он умеет решать и кафедрой заведует. Я ему говорю «Приезжай в школу, посмотри, осмыслите, напишите.». Сейчас делается 2 вещи : серия брошюр, вы наверно видели, для учителя, кружки. «Четность» вышла Медникова. ИМ сейчас будет идти задачи на построение Блинкова. Очень интересная, на мой взгляд, брошюрка с взвешиваниями.
- (ПИБ) Но это все вот это.

- (Шаповалов) В рамках этого, я очень надеюсь, мы наладим обратную связь, и наверно можно будет что-нибудь написать. Для начала некоторая подводка современная, чтобы задачи не 50-тилетней давности, которые у всех уже навязли. И свежие задачки, что бы давать школьникам и приближенный к учителю итог. Потому что в этом смысле очень много сделала Блинков, который пришел во все это дело от обычного учительства. Очень много туда пришли сверху. «Учителя, что с ними разговаривать, они же ничего не понимают, что с ними разговаривать». А это идет все снизу, от учителя, все эти регаты, которые стали вдруг работать, они более широкий круг школьников вовлекают. Даже те, которые не станут математиками, из них выходит основная масса учителей. Т.е. в этом смысле я от этой серии кое-чего ожидаю. Может, что-то удастся сделать. Если Вам интересно, то можно написать, по крайней мере, я постараюсь заявить некоторые темы, а потом уж как получится.

- (Шаповалов) Давайте обсудим некоторые задачки. 4, 6 и 8 я хотел бы обсудить.

Так вот 4-ая. «Можно ли разрезать какой-нибудь треугольник на четыре выпуклые фигуры: треугольник, четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник?»

- (кто-то) Можно.

- (Шаповалов) Можно, конечно, но вопрос, как такое придумать? Кажется, требуется определенное везение. Ан нет. Давайте посмотрим, есть у нас допустим, вершина 6-угольника, но она обязана совпасть и с вершиной другой фигуры. У 6-угольника 6 вершин. С каждой из других фигур может совпасть не более 2 вершин. А если смотреть на стороны, то вообще не больше одной. Значит 6-тиугольник обязан граничить со всеми и еще 3 стороны.

Может ли у нас 6-угольник быть вот так? Не может. Иначе у нас распадется на части. Значит, он волей - не волей закроет 1 угол. А если он закроет 1 угол, то он опять распадется на 2 части. Значит, он закроет 2 угла.

Давайте посмотрим на 5-тиугольник. Он имеет одну сторону, связанную с 6-угольником. Пятиугольник должен занять вот этот угол.

- (кто-то) Если так много сделать, то выпуклость пострадает.

- (Шаповалов) Сейчас мы подберем, сделаем чуть-чуть вот так.

Т.е. на самом деле раскручивая, понимаешь, что только так и никак иначе.

- (кто-то) Если пробовать по наитию рисовать, то поэтому положению шестиугольника приходишь. Мешается и понимаешь, что только так.

- (ПИБ) Тут еще работает принцип крайнего. Начинать надо либо с треугольника, либо с 6-угольника.

- (Шаповалов) Принцип узких мест в узком смысле говорит вот что: когда ты строишь конструкцию, начинай с такого места, у которого наименьшая свобода. Это принцип крайнего. Станным образом, почему то никто этот принцип в задах не формулировал, а я подумал про себя, что именно так я и решаю.

Задача №6. Я специально её придумал. Может быть чуть длинноватое условие, но тем не менее это для любителей задач на взвешивание, но некоторый обман.

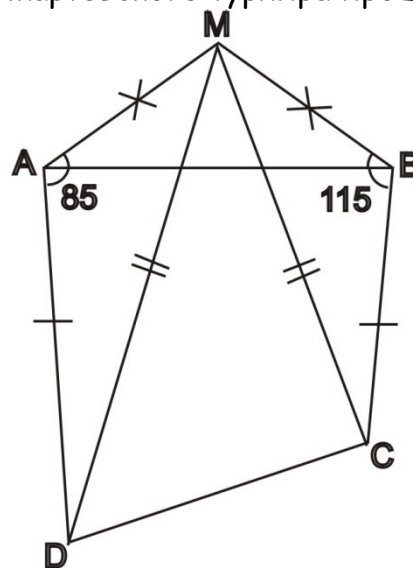
Есть квадратик 3×3 . Мы предполагаем, что либо все 8 разны, либо 1 отличается. У нас получается формально говоря, 9 вариантов. Из соображения информации требуется вроде как 2 взвешивания. Но на самом деле это метод грубого взлома, который в данном случае дает неправильный ответ. Давайте подумаем, как такое может быть? Что бы все ряды были равны, а один отличался? Если ряд отличается, то какой ряд отличается?

- (кто-то) На диагонали, у нас есть парочка выделенных диагоналей и их надо проверить.

- (Шаповалов) Озарение может приходить из самых левых соображений, из намека. У нас на самом деле горизонтальные и вертикальные ряды отличаться друг от друга не могут. У нас могут отличаться только диагонали. Возникает вопрос, как сравнить суммы по диагонали? Центральный не надо брать, потому что она входит. Дальше все понятно.

Вот такая вот обманка не сложная, тем не менее, я считаю очень хорошая задача.

Ну и наконец, задача №8, подкосила некоторое количество команд. Давайте мы её нарисует.



Давалась 7-миклассникам задача. Это я условно нарисовал. Потому что геометрия это искусство правильных рассуждений из неправильных чертежей. Надо понять, сколько спирта в час вливает каждая пара. И каждый аппарат сливает 0,001 бутылки в час. Значит, получается 72.

Я уж не знаю, следует ли говорить про Ватсона и Холмса, это задача такая, крутая. Основную идею я скажу: идея состоит в том, что Холмс, это известно, он нанимал всяких помощников. Он пригласил садовника и сказал: «Давайте вы будете ходить по часовой стрелке, но симметрично мне и тогда все встречи происходят одновременно». Если Холмс встречается с Ватсоном, то Ватсон встречается и с садовником в этот момент. А теперь про Холмса он уже

забывает, по одному кругу хотя садовник и Ватсон. И там точно такие же встречи, которые расположены равномерно. Их уже не сложно посчитать. А без этого тяжело. Ответ будет через 35 минут.

Если взять старые учебники, то этот метод всюду применялся, а потом это искусство было утеряно, считают что сейчас алгебра, хоп, хоп, хоп и все получится. Как алгебра, так и метод мми их учат включать соображалку и тупо применять. А это неправильно. Надо учиться читать.

Наконец давайте рассмотрим 12 задачку, она как раз не очень сложная. Я даю подсказку. Эта фигура всем известна. Пирамида.

- (кто-то) Её надо сплющить?

- (Шаповалов) Да, сплющенная пирамида. Её поверхности примерно одинаковы. Вот такая вот пирамида.

- (кто-то) Внизу будет больше.

- (Шаповалов) Где то вот здесь привести. Вот этот кусочек провести, поскольку она очень плоская, все будет нормально. Тоже меня поразило, потому что ответ очень простой. Опять-таки все шло от вопроса.

- (кто-то) Значит айсберг.

- (Шаповалов) Вот наверно, пожалуй все, что я хотел сказать. Нас вроде получилось вполне содержательное общение. Во всяком случае, для меня было приятно услышать, что мои соображения и другим интересны. И наверно следует об этом побольше писать.

- (кто-то) Я хочу сказать, что мне очень понравилась метафора ковра, она очень богатая. Потому что когда ты плетешь одну линию, рисунка не видно, видна смена пятен. И очень важно, что бы как то в процессе занятия обычной математикой и олимпиадными задачами, возникал какой-то рисунок.

Действительно так и надо.

- (Шаповалов) Другая метафора: есть некий лес, мы с ним прокладываем тропинки. И они постепенно начинают видеть связь. Что-то они могут делать сами, а в чем-то им нужен педагог.

- (кто-то) Я думал, что все наработки олимпиадных задач были в СССР, а сейчас оно живет все по инерции, а оказывается это все наоборот?

- (Шаповалов) Нет, с того времени было придумано очень много новых задач, но главное, произошла вещь, на мой взгляд, выбитие восполняется. Люди уезжают, но тем не менее новые подрастают. Сравнительно узкий слой, но это восполняется. С одной стороны в обычных школах идет снижение и примитивизация, но с другой стороны элита востребована, появились люди с деньгами, которые стремятся потратить с толком на воспитание детей. И за счет того, что это приняло негосударственные формы, это очень существенно.

- (кто-то) А большое количество соревнований порождают спрос на новые задачи?

- (Шаповалов) Большое количество соревнований не знаю. Спрос на задачи есть, но там как бы немного другое. Там идет некоторое измельчение. Каждое соревнование начинает заужать круг задач, которые для этого соревнования

подходят. Но именно за счет некоторой конкурентности это востребование восполняется. Надо публиковать хорошие задачи.

- (ПИБ) Эта книжка по турниру уже вышла?

- (Шаповалов) Нет, по турниру мы еще пишем.

За конспект лекции большое спасибо сотрудникам «Интеллектуала» и лично А.И.Стибневу.

<http://www.ashap.info/Nauka>