Примеры и контрпримеры в обучении математике

Аннотация

Преподавание математики не сводится к обучению действовать по раз и навсегда заданным алгоритмам. Путь от условия к цели (ответу, решению, знанию) приходится выстраивать самостоятельно. Примеры и контрпримеры служат вехами и помогают проверять правильность шагов. Да и убедить ученика много проще наглядным примером (частным случаем), чем безупречным, но многословным рассуждением.

Ia. Учим на примерах.

Прямоугольник, формулы площади и периметра.

После парочки прямоугольников, нарисованных в тетрадке, полезно выйти за её пределы...

а) Маша нарисовала прямоугольник со сторонами 1 см и 10 м (где нарисовала)? Какая площадь у этого прямоугольника? А какой периметр?

б) Может ли у прямоугольника площадью 1 дм^2 быть периметр больше 1 км?

в) Можно ли квадрат со стороной 1 дм разрезать на прямоугольники с общей площадью 1 м^2? А с общим периметром 1 км?

г) У Димы есть квадрат площадью 1 дм^2, а у Геры – прямоугольник площадью 1 гектар. Обязательно ли Гериным прямоугольником можно накрыть Димин?

Ib. Прикладная математика.

Длина, площадь, объём. Действия со степенями.

Известно: один вирус ковида весит примерно 1 фемтограмм (= 10^{-15} г). В зараженном человеке от 1 до 100 миллиардов вирусов: казалось бы много. Но по весу это всего лишь от 1 до 100 мкг (миллионных долей грамма) – мало, пылинка. Даже во всем человечестве, где одновременно болело до 100 млн чел, вирус весил не более 10 кг. Как мог такой пустяк всех на уши поставить? Но вред от вируса пропорционален площади поверхности. Считаем вирус кубиком воды, его размер 1 мкм. Тогда общая площадь поверхности 10 млрд вирусов в человеке 6 кв. дм - площадь поверхности куба со стороной 1 дм. Представьте внутри себя такую опухоль!

Ic. Расширение интуиции.

д) Могли ли быть правдивыми слова «Позавчера мне было 10 лет, а в след.году исполнится 13»?

е) Горизонтальную верёвку длиной 2 м удлинили на 1 см, и оттянули вниз посредине. На сколько см она приблизится к полу?

IIa. Опровержения без подсказки.

Пример диалога.

ж) Ученик. Если число делится на a и на b, то оно делится и на ab.

Учитель. 12 делится на 3 и на 6, но не делится на 3*6=18.

Ученик. Ой, это верно только если a и b друг на друга не делятся.

Учитель. Хорошо, 20 делится на 4 и на 10, но не делится на 4*10=40.

з) Какое наибольшее значение может принимать sinX+ cosX **?**

Ученик. *Ответ.* 2. *Доказательство.* max(sinX) = 1, max(cosX)=1, 1+1=2.

Учитель. Но если sinX=cosX=1, то $\sin^2 X+\cos^2 X = 2$ – так не бывает!

IIb. Частный случай.
и) Сколькими способами можно расположить трехклеточный уголок на клетчатой доске nxn так, чтобы он закрывал ровно 3 клетки?
Какой из ответов верный: 1. $4(n-1)(n+1)$; 2. $4n^2-8n+4$; 3. $3n(n-1)$. 4. $4n(n-1)$.

IIc. Отладка в задачах с переменной.

IId. Запоминание формул.
Например, ученик помнит, что a^3+b^3 равно то ли $(a-b)(a^2+ab+b^2)$, то ли $(a+b)(a^2-ab+b^2)$? Не страшно, выберем правильный вариант с помощью отладки.Проверим при $a=b=1$, и увидим, что левый вариант не подходит, а правый подходит.

III. Логика. Доказательства и опровержения.

Следствия и контрпримеры

Чтобы опровергнуть, хватит контрпримера. Чтобы доказать, необходимо рассуждение.

С1. Найдётся ли трёхзначное число с суммой цифр **а)** 22; **б)** 28?

С2. Может ли произведение цифр трёхзначного числа быть **а)** 22; **б)** 28?

Если не обязательно, хватит контрпримера. Если обязательно, нужно рассуждение.

С3. Известно, что Гриша – Сашин брат. Обязательно ли Саша – Гришин брат.

Листок занятия Следствия и контрпримеры на кружке 6-классников.

Признаки делимости

П1. Петя считает, что число делится на 7, если его сумма цифр делится на 7. А Вася не согласен «Нет, делится на 7, если «хвост» из двух последних цифр делится на 7. Кто из них прав?

П2. а) Сумма цифр числа делится на 9. Обязательно ли число делится на 3?
б) Число делится на 3. Обятельно ли сумма цифр числа делится на 9?

IV. Проверка леммы контрпримером.

В Зазеркалье имеют хождение монеты достоинством 7, 13 и 25 гиней. Алиса заплатила за пирожок несколько монет, и получила на сдачу на две монеты больше. Какова минимально возможная стоимость покупки?
Липа. *Ответ*: 10 гиней. *Пример*. Алиса отдала 2 монеты по 25 гиней, а получила на сдачу 2 монеты по 7 гиней и 2 монеты по 13 гиней.
Оценка. Стоимость покупки сравнима с 4 по модулю 6. Кроме того, стоимость покупки не может быть меньше самой мелкой монеты.
Разоблачение. Оценка содержит грубую ошибку. Если можно давать сдачу, то стоимость покупки может быть даже 1 гинея. *Частичный контрпример*: Алиса заплатила две монеты по 7 гиней и получила на сдачу монету в 13 гиней.