Примеры и контрпримеры в обучении математике

Аннотация

Преподавание математики не сводится к обучению действовать по раз и навсегда заданным алгоритмам. Путь от условия к цели (ответу, решению, знанию) приходится выстраивать самостоятельно. Примеры и контрпримеры служат вехами и помогают проверять правильность шагов. Да и убедить ученика много проще наглядным примером (частным случаем), чем безупречным, но многословным рассуждением.

План

I. а. Учим на примерах. Как учителю выбирать примеры. Расширение кругозора и интуиции.
II. Борьба с ошибками. Опровержение без подсказки. Частный случай. Отладка формул, выкладок, программ.
III. Логика: доказательства и опровержения.
IV. Доказательство - конструкция из блоков-лемм. Проверка леммы контрпримером.

Ia. Учим на примерах. Человек учится на примерах. Любое общее понятие или утверждение надо подкреплять примерами. Примеры нужны яркие (чтобы запоминались) и разнообразные (чтобы охватить важные случаи, до которых неопытным ученикам не додуматься). Соответственно, учителю нужна изобретательность, чтобы подбирать (а в идеале и придумывать) нужные примеры.
Прямоугольник, формулы площади и периметра.
После парочки прямоугольников, нарисованных в тетрадке, полезно выйти за её пределы...
а) Маша нарисовала прямоугольник со сторонами 1 см и 10 м (где нарисовала)? Какая площадь у этого прямоугольника? А какой периметр?
б) Может ли у прямоугольника площадью 1 дм^2 быть периметр больше 1 км?
в) Можно ли квадрат со стороной 1 дм разрезать на прямоугольники с общей площадью 1 м^2? А с общим периметром 1 км?
г) У Димы есть квадрат площадью 1 дм^2, а у Геры – прямоугольник площадью 1 гектар. Обязательно ли Гериным прямоугольником можно накрыть Димин?

Ib. Прикладная математика. Зачем мы учим математике? Чтобы дать ученикам инструмент, применимый как в самой математике, так и за её пределами. Но учиться сейчас чтобы начать применять через 5-10 лет – кто ж такое выдержит!? Ищем и показываем примеры быстрого применения. Заодно учим правильно истолковывать результат.
Длина, площадь, объём. Действия со степенями.
Известно: один вирус ковида весит примерно 1 фемтограмм (= 10^{-15} г). В зараженном человеке от 1 до 100 миллиардов вирусов: казалось бы много. Но по весу это всего лишь от 1 до 100 мкг (миллионных долей грамма) – мало, пылинка. Даже во всем человечестве, где одновременно болело до 100 млн чел, вирус весил не более 10 кг. Как мог такой пустяк всех на уши поставить? Но вред от вируса пропорционален площади поверхности. Считаем вирус кубиком воды, его размер 1 мкм. Тогда общая площадь поверхности 10 млрд вирусов в человеке 6 кв. дм - площадь поверхности куба со стороной 1 дм. Представьте внутри себя такую опухоль!
А в прикладных областях в основном придумывают и исследуют конструкции и алгоритмы действий. К этому нужно готовить. Исследование конструкций с помощью рассчетов посильно даже для несильных школьников. Важно, однако, их мотивировать: правильное вычисление должно давать качественный скачок результата. Скажем, сосчитал правильную дозировку и время – получил вкусное блюдо!

Ic. Расширение интуиции.

Учеников впечатляют ситуации, когда найденный или вычисленный результат противоречит интуиции, но может быть потвержден непосредственно.

д) Могли ли быть правдивыми слова «Позавчера мне было 10 лет, а в след.году исполнится 13»?

е) Горизонтальную верёвку длиной 2 м удлинили на 1 см, и оттянули вниз посредине. На сколько см она приблизится к полу?

IIa. Опровержения без подсказки.

Контрпримеры опровергают неверные утверждения. А где их больше всего? В решениях учеников!

Конечно, легко сказать ученику, что он неправ. Труднее *убедить*, что он неправ. И совсем здорово, если удастся *убедить без подсказки ответа,* что даёт возможность второй попытки! Поэтому нельзя упускать случай, когда можно привести контрпример к ответу, выводу. Или хотя бы к неудачному частичному рассуждению, неудачному месту в вычислениях.

Пример диалога.

ж) Ученик. Если число делится на a и на b, то оно делится и на ab.

Учитель. 12 делится на 3 и на 6, но не делится на 3*6=18.

Ученик. Ой, это верно только если a и b друг на друга не делятся.

Учитель. Хорошо, 20 делится на 4 и на 10, но не делится на 4*10=40.

з) Какое наибольшее значение может принимать sinX+ cosX **?**

Ученик. *Ответ.* 2. *Доказательство.* max(sinX) = 1, max(cosX)=1, 1+1=2.

Учитель. Но если sinX=cosX=1, то $\sin^2X+\cos^2X = 2$ – так не бывает!

IIb. Частный случай.

Легко найти контрпример к формуле: указываем частный случай (обычно малое значение), для которого формула неверна. Особенно важно проверять так ответы к задачам по комбинаторике.

и) Сколькими способами можно расположить трехклеточный уголок на клетчатой доске nxn так, чтобы он закрывал ровно 3 клетки?

Какой из ответов верный: 1. 4(n-1)(n+1); 2. $4n^2$-8n+4; 3. 3n(n-1). 4. 4n(n-1).

Байка. Как я не попал на кафедру комбинаторного анализа.

IIc. Отладка в задачах с переменной.

Проверка ответа для частного случая называется *отладкой.* Её надо показывать и настоятельно рекомендовать ученикам. Чем длиннее выполненные преобразования, тем больше вероятность ошибки. При выкладках в несколько страниц чистая внимательность помогает редко, без отладки не обойтись. Надо только выбрать такие значения переменных, чтобы равенство не получалось случайно, но и выкладки были небольшими.

(Я сам много ошибаюсь, поэтому учился сам себя контролировать. И главный результат моей диссертации получен вычислениями на 30 страниц, которые другие, более аккуратные коллеги пытались проделать, но не смогли довести до конца.)

Отладка при решении уравнения состоит в подстановке найденного корня в исходное уравнение – это знают все. Но не все догадываются с помощью подстановки в промежуточные уравнения найти место ошибки в выкладках. Между тем, с помощью деления пополам это можно сделать довольно быстро. Я регулярно демонстрировал такое студентам (ошибки мои были обычно непреднамеренными), и это производило большое впечатление.

IId. Запоминание формул.

Ученики часто ошибаются в формулах: забывают правильный знак, путают коэффициенты... Конечно, ведь формул много, все не упомнишь. Но это если пытаешься запоминать точно. Большинство формул, применяемых не каждый день, можно и нужно помнить

приблизительно.
Например, ученик помнит, что a^3+b^3 равно то ли $(a-b)(a^2+ab+b^2)$, то ли $(a+b)(a^2-ab+b^2)$? Не страшно, выберем правильный вариант с помощью отладки.Проверим при a=b=1, и увидим, что левый вариант не подходит, а правый подходит.
Лично мне такой приём особо пригодился мне при запоминании тригонометрических формул.

III. Логика. Доказательства и опровержения.
Основа математического мышления – логика. Верно или неверно, возможно или невозможно, всегда ли получится так или это необязательно? Школьники путаются, когда нужно общее рассуждение, а когда хватит одного примера или контрпримера. Да если бы только школьники … «Правда ли, что все учёные – хлюпики? – Конечно, у меня три свояка – кандидаты наук, и один из них – точно хлюпик».
Поэтому с самого начала курса я ставлю простые задачи с такими вопросами, чаще всего парами, чтобы при похожих формулировках одни решались рассуждением, другие – примером или контрпримером.
Следствия и контрпримеры

Чтобы опровергнуть, хватит контрпримера. Чтобы доказать, необходимо рассуждение.

С1. Найдётся ли трёхзначное число с суммой цифр **а)** 22; **б)** 28?

С2. Может ли произведение цифр трёхзначного числа быть **а)** 22; **б)** 28?

Если не обязательно, хватит контрпримера. Если обязательно, нужно рассуждение.

С3. Известно, что Гриша – Сашин брат. Обязательно ли Саша – Гришин брат.

Листок занятия Следствия и контрпримеры на кружке 6-классников.

В математике и логике недостаточно добиться запоминания верных правил и теорем. Не менее важно научить распознавать и опровергать неверные утверждения. Первый шаг на пути к самостоятельному мышлению – научить опровергать не ссылкой на чей-то авторитет хотя бы и ваш), а предъявлением контрпримера.

Признаки делимости

П1. Петя считает, что число делится на 7, если его сумма цифр делится на 7. А Вася не согласен «Нет, делится на 7, если «хвост» из двух последних цифр делится на 7. Кто из них прав?
П2. а) Сумма цифр числа делится на 9. Обязательно ли число делится на 3?
б) Число делится на 3. Обятельно ли сумма цифр числа делится на 9?

IV. Проверка леммы контрпримером.

Есть ученики, считающие математику наукой об общих рассуждениях (Теоремах). А построение примеров – это, мол, так, баловство. Полезно сказать им, что хорошее доказательство многоходово, его надо выстраивать постепенно, как и интересную конструкцию. А ступеньками в конструкции доказательства служат леммы. Иногда их оформляют явно, чаще доказывают в отдельном абзаце, а то и вовсе пишут «очевидно, что». Типовая ошибка: опора на ненадёжную ступеньку. А как заметить, что ступенька плохая, то есть лемма неверна? Опровергнуть контрпримером! Продумав минуту над контрпримером, ученик спасет себя от неверного решения либо хотя бы сэкономит себе час от попыток доказательства неверной леммы.

В Зазеркалье имеют хождение монеты достоинством 7, 13 и 25 гиней. Алиса заплатила за пирожок несколько монет, и получила на сдачу на две монеты больше. Какова минимально возможная стоимость покупки?
Липа. *Ответ*: 10 гиней. *Пример*. Алиса отдала 2 монеты по 25 гиней, а получила на сдачу 2 монеты по 7 гиней и 2 монеты по 13 гиней.
Оценка. Стоимость покупки сравнима с 4 по модулю 6. Кроме того, стоимость покупки не

может быть меньше самой мелкой монеты.
Разоблачение. Оценка содержит грубую ошибку. Если можно давать сдачу, то стоимость покупки может быть даже 1 гинея. *Частичный контрпример*: Алиса заплатила две монеты по 7 гиней и получила на сдачу монету в 13 гиней.