www.ashap.info/Nauka/pedagog.html

Проблема перебора случаев в классической геометрии

А.В.Шаповалов

Материалы лекции на семинаре учителей по геометрии

Сириус, 3 сентября 2016 г.

Аннотация

При решении задач комбинаторной геометрии перебор случаев - норма, а вот в классической геометрии это считается "неприличным". О случаях умалчивают или разбирают только "главный" случай, без особых оснований объявляя остальные "аналогичными". Бывает, это приводит к неполным ответам и даже к неверным задачам. Чтобы не разрушить мостик между классической геометрией и остальной математикой, надо учить перечислять все случаи, понимать, что в разных контекстах значит "аналогично" и знать, какие геометрические понятия помогут избежать перебора случаев (векторы и др.).

Задачи для лекции

1. Докажите, что если три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники равны.

2. Даны треугольники ABC и A'B'C'. Известно, что AB=A'B', BC=B'C', ∠A=∠A'. Докажите, что треугольники равны.

3. Из двух равных треугольников сложили больший треугольник. Докажите, что сложен равнобедренный треугольник.

4. Хорды *AC* и *BD* окружности с центром *O* пересекаются в точке *K*. *M* и *N* – центры окружностей, описанных около треугольников *AKB* и *CKD*. Докажите, что *OM* = *KN*. (**Тургор 21.8.2).**

5. Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки M первой окружности проведены прямые MA и MB. Они пересекли вторую окружность в точках C и D. Докажите, что касательная к первой окружности в точке M параллельна CD.

6. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Для произвольной точки X (отличной от A и B) обозначим через Y точку пересечения прямой XA со второй окружностью, а через Z – точку пересечения прямой XB со второй окружностью.
а) Для каждой точки X построена прямая, продолжающая высоту треугольника XYZ, проведенную из вершины X. Верно ли, что все эти прямые проходят через одну точку?
б) Выбрана одна из двух дуг, на которую первую окружность делят точки A и B. Для каждой точки X выбранной дуги построена прямая, продолжающая биссектрису треугольника XYZ, проведенную из вершины X. Верно ли, что все эти прямые проходят через одну точку?

7. В четырехугольнике ABCD ∠A=85°, ∠B=115°, AD=BC. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке M. Найдите ∠MAB.

Доказательство без перебора.

Почти софизм.
Поиск правильного случая.

Задача от Юры с неверным ответом.

Две пересекающиеся окружности: список случаев.

Четвертый признак равенства треугольников. Поиск случая.

Задачи от Юры с антипараллельностью.

Задачи из тургора.

Краткий конспект

Перебор необходим. Доказательство равенства треугольников по трем сторонам (радача 1)
Как видим, два случая действительно аналогичны: сумма углов заменяется на разность. Стоит ли аналогичные случаи выписывать подробно?
«Те же» 3 случая дают доказательство «четвертого признака» : по двум сторонам и углу не между ними (задача 2). Что не так? Пропущены два случая (здесь нет симметрии). Второй вырожденный случай дает контрпример.
Вывод: взявшись перебирать, делай это как следует: 1) перечисли все случаи 2) разбери их полностью. Конечно, при изложении можно не повторять подробно, а разобрать только то, что отличается. Но ученики должны видеть, что это не отговорка. Недопустимо некритическое использование приема «мы разобрали этот случай, остальные случаи аналогичны, разберите сами». В практической деятельности умение перебирать случаи встречается в миллион раз чаще признаков равенства треугольников.
Общий принцип: дети могут говорить неточные утверждения, к ним надо быть снисходительными, если есть уверенность, что они имеют в виду правильное. А вот учитель обязан следить за собой.

Что же делать, если на перебор случаев нет времени?
1) Избегайте задач, где нужен перебор.
2) Ищите средства, факты, теоремы, которые позволят решить задачу без перебора.

Задача 3. Из двух равных треугольников сложили больший треугольник. Докажите, что он равнобедренный.
Можно перебирать случаи взаимного расположения, но проще использовать, что против равной общей стороны лежат равные углы.
Там, где суммы замененяются на разности, помогает алгебра с использованием отрицательных величин (в том числе и при счете в дугах) или использование векторов (задача 4). Несколько теряя в наглядности, выигрываем в строгости.
Для вписанных углов и углов между касательной и хордой можно воспользоваться понятием антипараллельности (задача 5).
Ну, а если деваться некуда, и перебора не избежать?
Продемонстрируем, как перебирать на примере задач 6 и 7. Задача 7 особенно коварна, поскольку на материале 7 класса возникает ситуация, когда большинство учеников просто не находят нужного случая.
Принцип простой: случаи надо группировать так, чтобы решение для каждой группы было единым. Чаще всего достаточно перечислить возможные порядки взаимного расположения точек на прямой или окружности, а также взаимного расположения точек и прямых или окружностей.

При решении задачи 5 избавиться от случаев помогают и векторы.