# Преподавание математики как достоверной науки

**А.В.Шаповалов**

Конспект выступления на семинаре учителей, май 2013 г

Математика во многом наука абстрактная. Если преподавать её как сугубо прикладную науку, она сильно обедняется. Преподавание же «высокой теории» упирается в следующие естественные возражения учащихся: а) мне это не пригодится; б) теория – одно, а жизнь – другое; в) что бы я ни сделал, учитель всегда может сказать, что я не прав. Даже не будучи высказанными вслух или до конца осознанными, эти соображения могут сильно влиять на мотивацию учащихся. Сомнения мало-помалу подтачивают даже сильных и успешных учеников и студентов, и лет через 5 активных занятий математикой у них наступает кризис. Математика начинает казаться «игрой в бисер», и немало студентов уходят в другие сферы деятельности (так, несколько моих сокурсников катеогрически отказались идти в аспирантуру несмотря на научные успехи и уговоры научных руководителей. У меня лично, и у некоторых других олмпиадников ввиду интенсивных занятий математикой еще в школные годы кризис случился уже на 2-3 курсе. Я называю это «кризисом 5 лет».)

Все эти сомнения имеют одно общее: проблему достоверности и значимости абстрактных знаний, оторванных от их корней в природе и практической деятельности. Решив эту проблему, мы не только повысим мотивацию, но и создадим возможность широкого применения математики.

Менее мотивированные учащиеся отторгают абстрактную математику с самого начала. Это выражается в нежелании заниматься математикой вообще. Иногда их удается разговорить. Ниже сформулированы типовые сомнения, и типовые учительские ответы на них. Ответы правильные, но только вот в долгосрочном плане не очень помогающие. Если при подготовке занятий проблему достоверности не учитывать, придется смириться и с занятиями спустя рукава, и с уходами сильных учеников в другие области.

*Сомнение 1. Мне это не пригодится.*

Типовые мотивировки. Мой дядя всю жизнь работал начальником, и математика ему ни разу не пригодилась.

Тут я рассказываю про одного руководителя, которому тоже не пригодилось. Чтобы узнать сколько песка в куче, он не стал заморачиваться формулами, а пригнал бригаду землекопов, и они за два дня всю кучу лопатами на весы перекидали…

Но про себя-то я знаю, что в практической деятельности (не по работе) мне ни разу в жизни не пришлось решать квадратное уравнение, и всего раз в жизни посчитать интеграл (чтобы узнать объем нестандартной бочки).

*Сомнение 2. Теория – одно, а жизнь – другое.*

Тут можно ответить, что незнание законов не освобождает от ответственности, значит, знание может помочь освободиться от ответственности. Или, что знание лишним не бывает: если я знаю, что в темном переулке мне могут дать по морде, я силен уже этим знанием. Или, что глупый подгоняет жизнь под теорию, умный применяет теорию, подходящую к ситуации.

Однако над зазором между теорией и приложением её к повседневной практике учителю надо много трудиться.

*Сомнение 3: что бы я ни сделал, учитель всегда может сказать, что я не прав.*

Это сомнение вслух обычно не высказывают. Но ведь действительно, математика, по сути, наука не экспериментальная, учителю так или иначе приходится оценивать правильность рассуждения, и убедить ученика, что его рассуждение неверное, бывает нелегко. Ситуация заметно отличается от шахмат с их критерием «выиграл-проиграл» или от программирования с критерием «программа работает/не работает».

Я лично поощряю учеников, поправляющих мои оговорки, опечатки и ошибки (вплоть до повышения оценки самому активному).

Проблема достоверности мало кем ощущается. Он обычно прячется внутри другой проблемы: проблемы создания и поддержания стимулов к занятиям математикой. Рассмотрим несколько типичных решений, которые игнорируют проблему достоверности или решают её не теми средствами.
**А.** *Отсылка к внешней необходимости*
– чтобы сдать ЕГЭ, экзамен
– пригодится в институте.
Проблема достоверности полностью игнорируется.
Главная ошибка: воспринимать заданные внешней необходимостью рамки как конечную цель и строить обучение соответственно. Мы подчинены закону всемирного тяготения, считаемся с ним, но глупо перелагать на него ответственность за набитые шишки. Не надо идти туда, куда толкает тяготение – это всегда путь вниз. Занятия из под-палки стимулов не создают. Не случайны попытки школьников обойти внешнюю необходимость экзамена за счет шпаргалок и взяток. И мы должны идти своим путем. Я, например, любил говорит студентам что-нибудь такое: «Давайте я расскажу, как можно обхитрить экзаменаторов и не решать квадратное уравнение» и, добившись внимания, учил их теореме Виета.»
**Б.** *Преподавание математики как подчиненного средства для изучения одной конкретной нематематической дисциплины.*
Проблема достоверности осознается и решается, но за счет сильного сужения предмета «математика».Ключевое слово здесь «подчиненное». Многие воспринимают математику лишь как средство посчитать зарплату, прибыль или как средство решения узкоприкладных задач своей дисциплины. Это не математика. Руководитель спросил бухгалтера, сколько денег понадобится, чтобы выдать всем 200 работающим премию по 10% от зарплаты. За час бухгалтер посчитала: вычислила премию каждого и сложила. А понимай она закон дистрибутивности, управилась бы за минуту.
Однако само по себе преподавание математики с ориентацией на конкретную отрасль может быть хорошо как старт: быть не только стимулом, но и снабдить обучаемых запасом интуитивно понятных моделей. Так, физическая соображения могут помогать выработке математической интуиции. Важно еще понимать, что доказательное рассуждение для математиков и, скажем, для инженеров – не одно и то же. К примеру, рассуждение по индукции для человека с инженерным мышлением доказательством не является. Вопрос о сходимости ряда для них тоже схоластический (это, обычно, понятно из физических соображений), зато очень важно уметь оценить, сколько слагаемых надо оставить, чтобы получить сумму ряда с заданной точностью.
Но для каждой конкретной науки нужен лишь узкий круг разделов. Расширение списка разделов и дальнейшее преподавание должно всё-таки следовать структуре математики, не нарушать её единство.
**В.** *Подпитка интереса за счет побед над другими.*
Это процветает в кружках и матшколах, чрезмерно ориентированных на олимпиадную математику. Самолюбие – сильный стимул, его можно и нужно использовать. Но это стимул внешний. Проблема достоверности решается лишь отчасти: за счет участия во внешних соревнованиях, где ученик видит, что правильность не зависит от суждения учителя.
Проблемы начинаются, когда стимул заканчивается: учащийся терпит поражение, или просто выбывает из олимпиад по возрасту. Некоторые воспринимают этот переход тяжело. Мне известны несколько бывших победителей олимпиад, при поступлении в вуз утративших интерес к математике и переключившиеся на компьютерные игры. В качестве некоторого противоядия я стараюсь перед учениками затушевать

соревновательный момент и подчеркнуть игровой. Для большинства удовольствие от процесса игры может и должно перевешивать неудовольствие от проигрыша: только тогда игра окажется полезной всем.

**Г.** *Уход «в отрыв».*

Случается интенсивное обучение «узким» областям математики с опережением на класс или на два, с забеганием в университетскую программу. Может сочетаться с игрой в научную деятельность, участием в научных конференциях школьников. Такое обучение часто производит большое впечатление на несведущих: родителей и чиновников. Проблема достоверности при этом полностью игнорируется и даже отрицается (иногда с притворными жалобами, что смежные дисциплины «не поспевают»). Под спешку и интенсивность подводится «теория»: надо успеть показать побольше красивых математических фактов, а дальше уже осознание красоты будет служить стимулом. Реально же такое опережение чаще делается в расчете на победу в олимпиаде над сверстниками. Много раз видел как «ранний старт» завершается ранним кризисом.

Собственно, осознание сути проблемы достоверности подсказывает пути её решения. Надо последовательно работать над преодолением сомнений. Способов немало.

*А. Постоянный показ связей между математикой и действительностью.*

Под действительностью надо понимать тот опыт, который уже имеется у учащихся. Подойдут игры, общение с компьютером и гаджетами и даже школьный опыт, в том числе общение с цифрами и числами на уроках математики. Чем объекты связей разнообразнее, тем лучше. Значительную долю могут и должны составлять задачи на обычном языке. Тогда необходимый перевод на математический язык и обратно уже дает нужные связи.

*Для младших* идеально подходят ситуации, когда математика сопряжена с физической активностью. Так, решение задачи про перевоз волка, козы и капусты (или ей подобных) хорошо превращается в ролевую игру для малышей с четырьмя ролями (Лодочник, Волк, Коза, Капуста), а проход между партами служит рекой. Лемму о рукопожатиях можно предварить такими заданиями: разбить учащихся на группы по 6, и каждый должен в своей группе коснуться руками и ногами ровно троих. Затем то же, но для групп по 7 человек. Впрочем, задание о касании охотно выполняют даже и старшие школьники, особенно если в каждой группе представлены лица обоих полов…

*Для среднего возраста (6–9 классы)* хорошо работают задания, где можно на основе расчетов сделать предсказание, а потом его экспериментально проверить. *Таких заданий довольно много в книгах Я.Перельмана.* В частности, годятся измерения длин на расстоянии от объекта.

*Для старших (10-11 классы),* помимо физических экспериментов, можно порекомендовать эксперименты со статистическими испытаниями и сравнения результатов с предсказаниями на основе теории вероятностей.

Обсуждение работоспособности и эффективности алгоритмов можно сопровождать компьютерными экспериментами.

Сильным учащихся можно предложить обратную задачу: придумать строгое математическое обоснование утверждений, очевидно верных из физических соображений. Например, из физики понятно, что а) любой выпуклый многогранник будет устойчиво стоять на одной из его граней, где бы внутри не располагался центр тяжести; б) сумма сил давления на многогранник равна 0 (то есть равна 0 сумма векторов, перпендикулярных граням с длинами, пропорциональными площадям). А как это доказать математически?

*Б. Постоянный показ связей внутри математики между её разными областями*

Экспериментальная проверка математических рассуждений затратна по времени, и не все сильные учащиеся её одобряют. Они предпочтут перекрёстную проверку внутри математики, то есть проверку математики математикой же, но другим способом. Для этого удобно использовать задачи с двумя сильно непохожими решениями, скажем,

геометрическим и алгебраическим. В частности, полезно использовать метод координат не только для перехода к алгебре, но и обратно, то есть – для решения алгебраических задач геометрическими методами.
Полезны и «двустворчатые» задачи, то есть состоящие из двух дополняющих друг друга частей, требующих двух различных методов. К таким задачам относятся геометрические задачи на построение, где анализ и построение дополняют друг друга. Задачи на оценку+пример требуют как построения примера, так и рассуждения, доказывающего оценку (и, как правило, не опирающегося на пример). Когда такие разные оценка и пример вдруг «волшебным образом» сходятся, это производит на учащихся впечатление. Тем самым в их глазах повышается достоверность рассуждения и метода рассуждения, что в целом работает на единство математики.
Среди двустворчатых задач можно ещё выделить задачи на решение игр, то есть на поиск оптимальных стратегий за обе стороны. Здесь важно не только придумать хорошие алгоритмы, но и показать, что не существует лучших алгоритмов при *любой* игре другой стороны. Стоит отметить, что во многих случаях стратегию для каждой из сторон удобнее приводить и доказывать независимо.
Вообще, математике присущ высокий уровень рефлексии. Начав с построения моделей для понимания окружающего мира, математика в своем развитии все больше строит такие модели для целей внутреннего развития. В этом нет ничего плохого, пока это служит единству и целостности математики, а не растаскиванию её «по отдельным квартирам». Кружковая математика потому и эффективна, что пронизана связями между разделами. Кстати, отслеживание таких связей позволяет создать внутренний «индекс цитирования» понятий и методов. Это позволяет оценить степень их значимости и использовать его в преподавании. Скажем, идея «составить уравнение» много значимей формулы корней квадратного уравнения. Прогрессии и числа Фибоначчи встречаются много чаще тригонометрических функций. И т. п.
*В. Увеличение числа ситуаций, где правильность оценивается не преподавателем, а другими не зависящими от него лицами или самими учениками. Для этого хорошо подходят* математические бои, другие командные соревнования и личные олимпиады. Очень эффективно работает привлечение старших учащихся к контролю младших учеников и даже некоторому их обучению.

*Г. Показ идей решения, идущих от действительности*

Математика возникла как обобщение и осмысление нашего умения понимать действительность. Понять: построить в голове адекватную модель. Математические модели – важный частный случай. Умение их строить заложено от природы. Маленький ребенок: математический гений, так как он самостоятельно открывает математическую струтуру родного языка (иначе не заговоришь).
Куда девается эта гениальность? Она заваливается мусором штампов, а мы с вами всего лишь помогаем эти пласты мусора хоть немного разгрести.
Используя какой-либо метод решения, я всегда стараюсь показать его аналогию или связь с методом вне математики. Много таких аналогий читатель может найти в моих книгах «Как построить пример» и «Принцип узких мест». Так, использование неэлементарных построений в задачах на построение аналогично строительству дома не из отдельных кирпичей, а из блоков и панелей. Доказательство по индукции аналогично постройке дома поэтажно, когда следующий этаж опирается на уже построенные предыдущие.
Вообще, учащиеся должны осознать, что как бы хорошо они не изучили математику, их житейский опыт в миллионы раз больше, и поэтому есественно черпать идеи и подсказки оттуда!