Раздаточный материал

Занятие 1. Линейная функция — 1

1.1. Найдите уравнение линейной функции, график которой параллелен графику

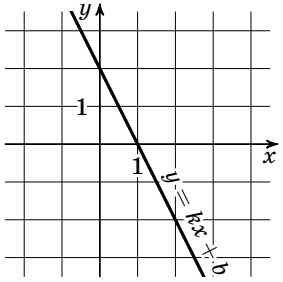
$$y = -1{,}5x + 6$$

и проходит через точку $T(3; -1)$.

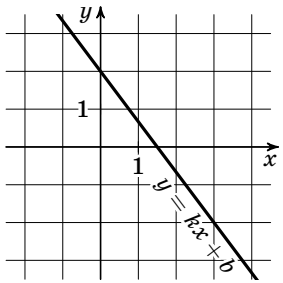
1.2. Дан график функции $y = kx + b$ (см. рисунок). В той же системе координат схематически постройте прямые, симметричные данному графику относительно:

а) оси ординат; б) начала координат,

и запишите общий вид уравнений соответствующих линейных функций.



К упражнению 1.2



К упражнению 1.4

1.3. Известно, что график функции $y = kx + b$, где $k > 0$, проходит через точку $(1; 0)$. Схематически постройте графики данной функции и функции $y = bx + k$ в одной системе координат.

1.4. На рисунке изображён график функции $y = kx + b$. Сравните $|k|$ и $|b|$.

1.5. Линейная функция совпала с обратной к ней. Найдите все такие функции.

1.6. Прямые $y = kx + b$, $y = 2kx + 2b$ и $y = bx + k$ различны и содержат одну и ту же точку. Какими могут быть её координаты?

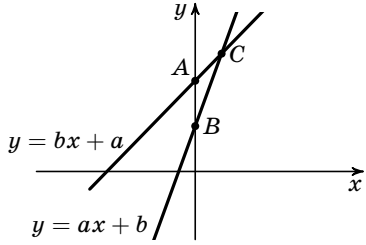
1.7. Графики функций $y = 3x - 8$, $y = -2x + 2$ и $y = |c|x - 5$ разбивают координатную плоскость на несколько частей. При каких значениях c среди этих частей нет треугольников?

Занятие 2. Линейная функция – 2

2.1. При каких a, b, c прямые $y = ax + b$, $y = bx + c$ и $y = cx + a$ проходят через точку $(1; 1)$?

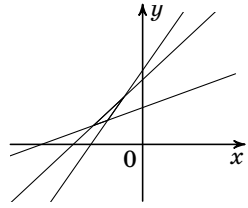
2.2. Даны различные числа m и n. Про $f(x)$ и $g(x)$ известно, что это различные линейные функции, для которых выполняется равенство $f(m) - f(n) = g(m) - g(n)$. Могут ли графики этих функций иметь общие точки?

2.3. На доске были построены графики функций $y = ax + b$ и $y = bx + a$, где a и b – различные числа (см. рисунок). С доски стёрли всё, кроме точки C пересечения этих графиков и точек A и B их пересечения с осью ординат. Объясните, как восстановить оси координат с помощью циркуля и линейки.



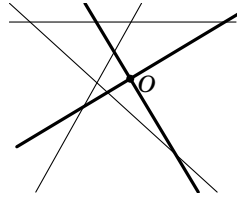
2.4. Прямые $ax + by + c = 0$, $bx + cy + a = 0$ и $cx + ay + b = 0$ пересекаются в одной точке. Может ли эта точка иметь обе положительные координаты, если $a + b + c \neq 0$?

2.5. Графики трёх линейных функций расположены так, как показано на рисунке. Существуют ли такие числа a, b, c, что одна из функций задаётся формулой $y = a^2x + b$, другая – $y = b^2x + c$, третья – $y = c^2x + a$?



2.6. Через начало координат проведены прямые (включая оси координат), которые делят координатную плоскость на углы величиной 1°. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 100 - x$.

2.7. На листе бумаги были построены система координат (выделена жирно) и графики трёх функций: $y = ax + b$, $y = bx + c$ и $y = cx + a$. После этого стёрли обозначения и направления осей, а сам лист как-то повернули (см. рисунок). Укажите на рисунке ось абсцисс и её направление.

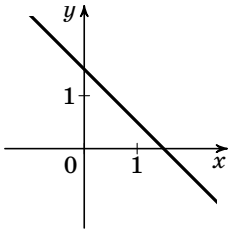


Занятие 3. Квадратичная функция

3.1. Существует ли значение a, при котором вершина параболы $y = 4x^2 - 4(a+1)x + a$ лежит во II координатной четверти?

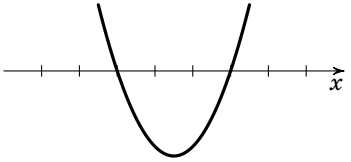
3.2. Докажите, что две различные параболы, в уравнениях которых одинаковые коэффициенты при x^2, имеют не более одной общей точки.

3.3. На координатной плоскости задан график функции $y = kx + b$ (см. рисунок). В той же координатной плоскости схематически постройте график функции $f(x) = kx^2 + bx$.



3.4. Верно ли, что если $b > a + c > 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня?

3.5. На рисунке изображён график квадратного трёхчлена $y = x^2 + bx + c$, причём ось ординат стёрта, а расстояние между соседними отмеченными точками равно 1. Найдите дискриминант этого трёхчлена.



3.6. Квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ имеет два корня, один из которых лежит внутри отрезка $[0; 1]$, а другой — вне этого отрезка. Определите знак $f(b)$.

3.7. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два корня, расстояние между которыми больше чем 2025. Докажите, что уравнение

$$f(x) + f(x+1) + \ldots + f(x+2024) + f(x+2025) = 0$$

имеет два различных корня.

Занятие 4. Параболы и прямые

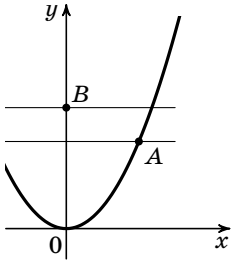
4.1. Даны двадцать прямых, параллельных прямой $y = 5x$, каждая из которых пересекает параболу $y = x^2$ в двух точках. Найдите сумму абсцисс всех точек пересечения этих прямых и параболы.

4.2. Две параллельные прямые высекают на параболе $y = x^2$ две дуги. Докажите, что проекции этих дуг на ось абсцисс равны.

4.3. На параболе $y = x^2$ выбраны четыре точки A, B, C и D так, что прямые AB и CD пересекаются на оси ординат. Найдите абсциссу точки D, если абсциссы точек A, B и C равны a, b и c соответственно.

4.4. График функции $y = x^2 + px + q$ касается прямой $y = 2x + p$. Докажите, что наименьшее значение функции не зависит от значений p и q.

4.5. Две прямые, параллельные оси x, расстояние между которыми равно 1, пересекают одну из ветвей графика функции $y = x^2$ и ось y в точках A и B соответственно (см. рисунок). Найдите угол OAB, где $O(0; 0)$.



4.6. Прямая пересекает график функции $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс — в точке с абсциссой x_3. Докажите, что $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}$.

4.7. На координатной плоскости построили график функции $y = x^2$, после чего оси координат стёрли. Используя только циркуль и линейку, восстановите оси координат и единичные отрезки на них. (Вершина параболы не отмечена, и «на глаз» её отметить нельзя.)

Занятие 5. Кусочно-линейные функции – 1

5.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3x + |5x - 10|.$$

5.2. Решите уравнение $|x - 2025| + |x + 2025| = 2|x|$.

5.3. Решите уравнение $\max(x; 2 - x) = \min(3x; 1 + 2x)$.

5.4. Закрасьте на координатной плоскости все точки, для которых $|x + y| = |x| + |y|$.

5.5. На прямой AB отмечено 7 точек, лежащих вне отрезка AB. Может ли сумма расстояний от них до A быть равна сумме расстояний от них до B?

5.6. а) Используя модуль, задайте каждое из выражений $\max(a; b)$ и $\min(a; b)$ в виде одной формулы для всей числовой прямой.

б) Используя полученные формулы, покажите ещё один способ решения уравнения 5.3.

5.7. Какое наибольшее значение выражения

$$||||a - b| - c| - d| - e|$$

можно получить, заменив буквы a, b, c, d, e на различные натуральные числа от 1 до 5 в некотором порядке?

Занятие 6. Кусочно-линейные функции — 2

6.1. Решите уравнения: а) $[9-x]=10$; б) $x=100+\{x\}$.

6.2. Решите уравнение

$$[x^{2025}]+[x^{2024}]+\ldots+[x^2]+[x]=\{x\}-1.$$

6.3. Используя функцию $y=|x|$, задайте одной формулой функцию $g(x)=\operatorname{sgn}(x)$, где $x\neq 0$.

6.4. Докажите, что равенство $[x+n]=[x]+n$ выполняется для любого x тогда и только тогда, когда n — целое число.

6.5. Докажите, что при всех значениях x и y и любом натуральном k выполняются равенства:

а) $\{x+y\}=\{\{x\}+\{y\}\}$; б) $\{k\{x\}\}=\{kx\}$.

6.6. а) Пусть $g(x)$ — функция округления числа x до целого числа. Выразите одной формулой $g(x)$ через функцию $[x]$.

б) Пусть $h(x)$ — функция, выражающая расстояние от числа x до ближайшего к нему целого числа. Выразите одной формулой $h(x)$, используя функции $\{x\}$ и $|x|$.

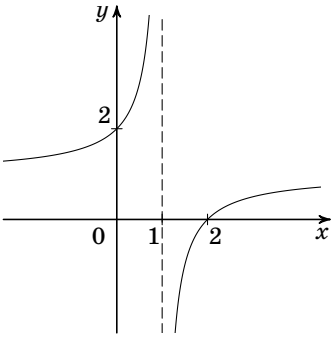
6.7. а) Число $x^2-[x]\cdot\{x\}$ целое. Докажите, что число $x\cdot[x]\cdot\{x\}$ целое.

б) Число $x^2-[x]\cdot\{x\}$ — точный квадрат. Обязательно ли x — целое число?

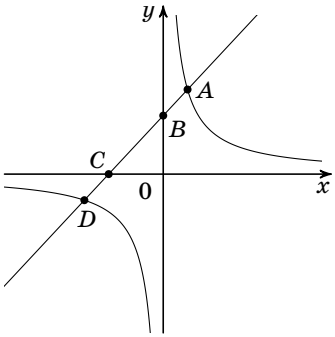
Занятие 7. Обратная пропорциональность и дробно-линейная функция

7.1. График функции $y=\frac{1}{x}$ параллельно перенесли так, что его центром симметрии стала точка $(-3;-2)$. Найдите канонический и стандартный виды уравнения дробно-линейной функции, соответствующей полученному графику.

7.2. На рисунке дан график дробно-линейной функции. Найдите уравнение этой функции в каноническом виде.



К задаче 7.2



К задаче 7.3

7.3. Дан график функции $y=\frac{k}{x}$, где $k>0$. Произвольная прямая пересекает его в точках A и D, а оси координат — в точках B и C (см. рисунок). Докажите, что $AB=CD$.

7.4. На доске нарисован график функции $y=\frac{k}{x}$, где $k\neq 0$, и 2025 прямых, параллельных прямой $y=kx$. Найдите произведение абсцисс всех точек пересечения прямых и графика.

7.5. а) Касательная к гиперболе $y=\frac{k}{x}$ в точке A пересекает оси координат в точках B и C. Докажите, что $AB=AC$.

б) Касательная к гиперболе $y=\frac{k}{x-m}+n$ в точке K пересекает асимптоты графика в точках M и N. Докажите, что $KM=KN$.

7.6. Найдите уравнение функции, обратной к дробно-линейной, заданной:

а) в каноническом виде; б) в стандартном виде.

7.7. Найдите все дробно-линейные функции $f(x)$, обратные к которым совпадают с самой функцией $f(x)$, выразив их: а) в каноническом виде; б) в стандартном виде.

Занятие 8. Множество точек на координатной плоскости — 1

8.1. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$y \leqslant x^2 - 2.$$

8.2. На координатной плоскости постройте множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 = x^2 y^2 + 1.$$

8.3. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x^2 + y^2 \leqslant 4x.$$

8.4. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x^2 - y^2 \leqslant 0.$$

8.5. На координатной плоскости постройте множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$|y| = \frac{1}{|x| - 1} - 1.$$

8.6. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\sqrt{x + y} > x.$$

8.7. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x|y| \leqslant 3.$$

Занятие 9. Множество точек на координатной плоскости – 2

9.1. Найдите площадь фигуры, которая задана на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} x \leqslant \sqrt{1-y^2}, \\ y \leqslant \sqrt{1-x^2}. \end{cases}$$

9.2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$|y+2x|+|y-2x| \leqslant 2.$$

9.3. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$y^2+y \geqslant |x|+x-1.$$

9.4. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$|x^2-3y+y^2|-|4+y^2-4y| = |4-y-x^2|.$$

9.5. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x^2-\left(y+\frac{1}{y}\right)x+1 > 0.$$

9.6. Сколько точек координатной плоскости, имеющих обе целые координаты, удовлетворяют условию

$$\begin{cases} \max(25|x|;\, |y|) \leqslant 125, \\ y \leqslant x^3? \end{cases}$$

9.7. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют следующим условиям:

а) $\{y\}=\{x\}$; б) $[y] \geqslant [x]$.