

Предисловие

И чем же? – одними словами!

И. Бунин

Чему должны учить в школе? На разных уроках разному. Но почти на всех и не в последнюю очередь – работать с информацией. Воспринимать её, анализировать, делать выводы и описывать результат. Текст – основной источник информации. Поэтому текстовые задачи – один из краеугольных камней школьной программы по математике. Краеугольный в прямом смысле, соединяющий две «смежные стены»: текстовую постановку задач и математические методы их решения.

В современных учебниках это обстоятельство иногда подчёркивается особыми типами заданий: «переведите на математический язык», «постройте математическую модель», и т. п. Такие задания обычно подразумевают составление уравнений, неравенств или их систем. Эти моменты нашли отражение в предлагаемой книжке. Умению выбирать подходящую переменную и вычленять в тексте условие, позволяющие составить уравнение, посвящено шестое занятие, на седьмом – учимся не бояться большого количества переменных, на десятом – составлять системы уравнений, а на одиннадцатом – работать с неравенствами.

Но начинаем мы не с этого. Уравнение – важный, но далеко не единственный способ преобразования текста задачи в удобную для анализа форму. На этапе восприятия информации бывают полезны «промежуточные языки». Для задач первого занятия эту роль играет *чертеж*; для части задач третьего и всех задач четвёртого занятия – *таблица*. На втором и отчасти третьем занятиях отрабатывается навык *переформулировки* задач с языка процентов на язык умножения.

В школьных учебниках и в методической литературе таким приёмам уделено мало внимания. Приводя в качестве образца верные решения, их авторы, казалось бы, подробно объясняют переход от текста к уравнению. Но чем же? Одними словами. Целенаправленное обучение преобразованию текстовой информации в различные форматы кажется нам важным по двум причинам. Во-первых, вместо сообщения верных решений оно вооружает учеников удобными алгоритмами, применимыми к широкому классу задач. Во-вторых, умение решать текстовые задачи вообще не конечная цель, а лишь одно из средств научить работать с информацией математическими методами.

В одной из первых книжек нашей серии, «Арифметических задачах» П.В. Чулкова, приведены оригинальные решения задач, входящих в золотой фонд школьной математики. Перенос акцента с красоты решений на то, как их можно было бы придумать, побудил авторов включить в эту книжку не только алгебраические, но и арифметические методы решения задач. Не избегая частичного повторения тем и типов задач, имеющих в книге П.В. Чулкова, мы старались не дублировать ни формулировок, ни подходов к решению. Также мы постарались не дублировать задачи, вошедшие в книжку А.Д. Блинкова «Классические средние в арифметике и геометрии».

Книжка «Текстовые задачи» содержит **двенадцать** занятий. В материалы каждого занятия входят: поясняющий текст для учителя; несколько типовых задач, подробно разобранных; задачи, которые могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения (как на занятии, так и дома); подробные решения этих задач (в ряде случаев – несколькими способами); методические комментарии для учителя, часто включающие в себя *путь к решению* (текст, объясняющий как можно прийти к этому решению).

Отдельным списком представлены дополнительные задачи различного уровня трудности, часть из которых в какой-то степени дублирует задачи, предложенные для занятий, а часть – дополняет их новыми идеями (наиболее сложные задачи отмечены знаком *). Эти задачи можно использовать на усмотрение преподавателя (или обучающегося). Для них также, как правило, приведены подробные решения (в отдельных случаях – ответы и указания). Для удобства, в конце каждого занятия приведен список задач из этого раздела, которые имеет смысл использовать для

закрепления материала, контроля его освоения и углубления. Следует учесть, что есть задачи, которые могут быть отнесены к нескольким занятиям.

Отметим, что многие задачи (как из занятий, так и из дополнительной части) ранее использовались на различных математических олимпиадах и турнирах, поэтому сюжеты этих задач яркие и запоминающиеся. Это выгодно отличает их от большинства задач школьных учебников и служит дополнительной мотивацией для учеников.

Материалы этой книжки могут использоваться как для проведения занятий кружка, так и для уроков математики в 5 – 9 классах. Занятия упорядочены не по сложности, а в соответствии с прохождением школьной программы. Как правило, задачи в них сгруппированы не по содержанию, а по методам решения; исключение сделано для двух тем: процентов (занятия 2, 3 и отчасти 4) и отношения скоростей (занятие 5). Как показывает практика, эти темы традиционно трудны для школьников в силу того, что это относительные величины. Интуиция, идущая от работы с целыми величинами, здесь не всегда работает. Более подробно об этом – в отдельной главе «Проценты», предваряющей все занятия.

Проводя занятие, посвящённое методу решения задач, важно соблюдать меру. С одной стороны, надо учить ребят, что делать, если задача не решается: как наглядно представить условие, на какие его особенности обратить внимание, и т. д. С другой стороны, конкретный школьник может в данный момент вовсе не нуждаться в помощи, потому что эта задача для него проста. Либо он предпочитает решить её по-своему, нерационально или даже с ошибками, которые покажутся ему досадной случайностью. Преподавателю задача может быть интересна не сама по себе, а как пример применения определённой техники. А ученику может быть важным получить верный ответ и сделать это самому, а не по чужой подсказке. Эти противоречия можно смягчить разбором части задач для самостоятельного решения. После того, как решишь задачу по-своему, обычно потом нетрудно и интересно посмотреть на альтернативный подход. Если метод действительно хорош, то рано или поздно ученик его применит.

Занятие 1 наиболее уместно проводить для 5 класса. Условия всех включённых в него задач можно наглядно изобразить с помощью отрезков соответствующей длины или точек на координатном луче. К нему в полной мере относится всё сказанное в предыдущем абзаце. Зачем ребёнку утруждать себя чертежом в задаче в одно действие? Часть детей и без этого легко назовёт верный ответ. Кто-то сначала перепутает, но неизбежно угадает со второго раза и в итоге будет доволен собой.

Готовое верное решение тоже можно ярко и понятно рассказать без чертежа. Интересно сравнить, например, решения аналогичных задач: Д4 из этой книжки (нарисуем и увидим) и задачи 8 из занятия 1 из [15] (предположим, что дело было так... теперь добавим). Чтобы догадаться, что именно надо предположить и что потом добавить, надо обладать либо творческим мышлением, либо достаточным опытом в решении задач конкретного типа. А чертёж мы рекомендуем ученикам использовать как первый шаг для понимания условия задач, а учителям – как способ быстро превратить понятное некоторым в понятное всем. И на этом занятии советуем делать чертёж к каждой разбираемой задаче. Если учитель или ученик дополнит чертёж интересным словесным объяснением, это только плюс.

Занятия 2 и 3 полностью составлены из задач на проценты. Группировка по содержанию для этой темы нам показалась уместной, поскольку почти все школьники одинаково плохо её усваивают на уроках. Почему так происходит? Потому что с процентами действительно неудобно работать. Но они и придуманы вовсе не для работы, а лишь для передачи информации. Поэтому язык процентов уместен в выпуске новостей, в научной статье, в деловом отчёте. А на уроках математики – только в двух случаях: в формулировке задачи и при записи ответа. А для работы удобны не проценты, а дроби, десятичные и обыкновенные.

В нашей книжке мы исходим из того, что на школьных уроках дети познакомились с понятием процента и научились находить один процент как промежуточное действие в

любой из трёх типовых задач-одноходовок на проценты. Этот этап необходим для понимания смысла процентов, хотя и увеличивает количество действий вдвое или даже втрое. Например, если надо увеличить число 15 на 30%, достаточно умножить его на 1,3. А пятиклассников учат сначала найти 1% от 15, потом – 30% от 15, а затем прибавить полученный результат к 15. Если это твёрдо выучить и остановиться, более сложные задачи на проценты из-за большого количества действий останутся недоступны большинству учеников.

Одноходовые задачи на проценты в книжке не рассматриваются, таких задач более чем достаточно в любом школьном учебнике. Перевод с языка процентов на язык умножения десятичных дробей мы считаем идеологической основой темы «Проценты», ему полностью посвящено второе занятие. Оно призвано помочь детям осознать, что проценты, десятичные дроби и обыкновенные дроби – не три отдельные темы, а разные языки, и привыкнуть во всех затруднительных случаях переводить задачу с удобного только для журналистов языка процентов на родной язык дробей. Преодолеть «языковой барьер» помогает достаточное количество устных и письменных упражнений на заполнение пробела типа «Увеличить на 30% означает умножить на ...» и «Было x , стало $0,6x$. Значит, число уменьшилось на ... процентов».

Так как применение пропорций в задачах на проценты обычно неплохо изучается на уроках, то мы его используем как уже сформированную технику на третьем занятии. Основной новый метод в третьем занятии – это применение таблиц. На этом занятии также отрабатывается умение определять, что следует брать за 100% с помощью волшебного слова «чем». Оба занятия имеет смысл проводить в 6 – 7 классах.

Занятие 4 составлено, на первый взгляд, из разных по тематике задач. Объединяет их наличие в условии трёх величин, одна из которых равна произведению двух других. В качестве универсального «ключа» к таким задачам рассматривается составление таблиц. Оно развивает также общие умения: структурировать информацию, видеть связь между величинами, удачно вводить переменные.

Идеологически это занятие продолжает первое: таблицы, как и чертежи, помогают осознать условие, перевести его на другой язык. Они одинаково хорошо совмещаются и с решением задач по действиям, и с составлением уравнений. Подобранные задачи ориентированы на учеников 6 – 7 классов. В занятие также вошли задачи на проценты, в которых, кроме составления таблиц, используются идеи и техники двух предыдущих занятий.

Занятие 5 посвящено задачам на движение и его аналогам. Их можно решать различными способами, но основная цель – научить использовать пропорциональность величин, в первую очередь – отношение скоростей. Подчёркивается важность умения сделать чертёж к условию задачи, а также умение применять пропорции. Технически предложенные решения доступны в конце 6 класса, но по сложности некоторые задачи ближе к 7 и даже 8 классам.

Первые пять занятий развивали и расширяли курс математики 5 – 6 классов. Дальнейшие в большей степени примыкают к курсу алгебры 7 и 8 классов.

На **занятии 6** обсуждаются задачи на составление уравнений с одной переменной. Оно уместно в 7 классе, опирается на накопленный на уроках опыт в составлении уравнений и обобщает его. Также в нём развивается идея первого занятия о родстве арифметических и алгебраических решений: одно и то же можно обозначить переменной, можно частью, можно единичным отрезком или клеточкой. Не случайно книжку «Арифметические задачи» продолжают не «Алгебраические задачи», а именно «текстовые». Умение решать задачи алгебраически – не повод полностью отказаться от арифметического подхода.

Занятие 7 посвящено задачам, для решения которых уместно вводит несколько переменных. В нём есть задачи, в которых требуется найти как линейную комбинацию, так и отношение переменных. Отдельный интерес представляет обсуждение того, что можно найти по данным задачи, а что нельзя. Кроме того, в нескольких задачах

встречается среднее арифметическое каких-либо величин. В процессе их решения показан полезный приём перехода от него к сумме всех величин. Занятие адресовано семиклассникам.

На **занятии 8** ученики смогут применить полученные ранее навыки в новых ситуациях. Все задачи этого занятия так или иначе связаны с движением по течению и против течения. Некоторые из них имеют традиционные сюжеты: движение по реке или по эскалатору. Их решение позволит школьникам вспомнить основные идеи и техники, характерные для таких задач. Основную часть занятия составляют задачи с другими сюжетами, в которых рассматриваются величины, которые одновременно по одной причине убывают, а по другой возрастают (либо также убывают). Несмотря на несхожесть сюжетов, это позволяет их также интерпретировать в виде движения по реке. Кроме того, в таких задачах интересно проследить связь между алгебраическим и арифметическим решениями. Это занятие предназначено для 8 – 9 классов.

Занятие 9 содержит задачи, в которых все величины целые, что позволяет, наряду с составлением уравнений, использовать факты из теории делимости, перебор и другие нестандартные рассуждения. Сами факты, чаще всего, известны из школьной программы, но умение применить их в нужный момент и на нужном уровне строгости нуждается в отработке. Уравнения, составляемые в процессе решения, как правило, содержат несколько переменных, и не решаются, если не использовать указанные приёмы. Занятие также адресовано 8 – 9 классам, но может проводиться и ранее.

Занятие 10 посвящено задачам, для решения которых уместно составлять системы уравнений. Как правило, эти уравнения линейные или легко сводятся к линейным. Оно предназначено для 7 – 8 классов. Применять системы уравнений к решению отдельных задач можно и ранее, до изучения соответствующей темы. Сложение уравнений и подстановка – естественные идеи, доступные и шестиклассникам. Но на уроках в 7 классе изучаются алгоритмы, позволяющие решить любую систему линейных уравнений, в том числе и с неудобными коэффициентами. Вместе с тем, при работе со школьниками, испытывающими технические трудности, его можно отнести и к 9 классу.

Занятие 11 содержит задачи, для решения которых потребуется использовать неравенства и оценки. Исходя из школьной программы, его уместно проводить в 8 – 9 классах, но для «продвинутых» учащихся оно доступно и ранее. Задачи этого занятия весьма разнообразны: в некоторых надо составлять и решать линейные неравенства или их системы, в других – сравнить две величины, что позволяет отработать определения понятий «больше» и «меньше», а третьи можно решить на уровне арифметических действий и здравого смысла..

Занятие 12 – нестандартные задачи – соответствует своему названию. Часть задач этого занятия с удовольствием решат отдельные пятиклассники, часть поставит в тупик выпускников школы, причём эти части пересекаются. Оно несколько отличается от предыдущих занятий: почти все предлагаемые задачи – для самостоятельного решения. Это обусловлено тем, что для этих задач невозможно вычлнить типовые приёмы решения, каждая из них потребует отдельного подхода.

По традиции, в конце книжки все занятия представлены в виде дидактических материалов. Понятно, что преподаватель математического кружка (или учитель на уроках или факультативных занятиях) может по своему усмотрению использовать только часть предложенных занятий, поменять порядок их изучения, и т. д.

Выражаем благодарность всем авторам книг и статей, указанных в списке литературы, а также авторам всех использованных задач (многих из которых установить, к сожалению, не удалось).

Авторы благодарны А.И. Сгибневу, Ю.М. Эдлину и А.В. Шкловеру, которые высказали ряд ценных замечаний, ознакомившись с черновой версией текстов. Наша особая благодарность – редактору серии А.В. Шаповалову. Его внимательное прочтение книги способствовало улучшению и уточнению текстов: как вводных замечаний, так и условий и решений задач. Отдельное спасибо – сотрудникам издательства МЦНМО, без

деятельного участия которых эта книжка не была бы издана.