Занятие 1
Нарисуем условие

Что нам стоит дом построить?
Нарисуем – будем жить!
С. Маршак

Чтобы решить задачу, надо осознать её условие. Нулевого шага – прочитать его – хватает не всегда. Простейший первый шаг – сделать краткую запись условия – помогает выделить главное и структурировать данные. Второй шаг – изобразить данные не только словами и числами, но и проиллюстрировать графически. В этом занятии собраны задачи, в которых чертёж служит ключом к решению. Их можно разделить на две группы. Первая связана со сложением и вычитанием (больше на__), вторая – с умножением и делением(больше в…, задачи на доли и дроби).

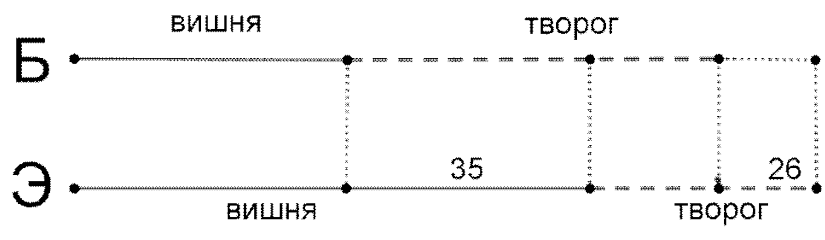
Не путать сложение с вычитанием учат в начальной школе и в начале 5 класса. В задачах 1.1 и 1.5 большая величина изображается более длинным отрезком. В задачах 1.2 и 1.7 предлагается изобразить числа в виде точек на координатном луче; здесь «больше» означает правее. Обе эти техники уместны не только на кружке, но и на уроках, для тренировки можно использовать также задачи Д1 – Д3.

С задачами на доли и дроби школьники встречаются в течение нескольких лет, постепенно меняя технику их решения. Решение «на клеточках» до изучения действий с обыкновенными дробями способствует глубокому неформальному пониманию дробей. Такие решения мы предлагаем в задачах 1.3, 1.4, 1.6, 1.9, 1.10, а также Д4 – Д9 и Д11.

Применение графических схем в задачах на движение не вошло в это занятие и вообще в эту книжку; оно обсуждается, например, в [15], а также во многих других изданиях.

Это занятие адресовано пятиклассникам. Главная его цель – развитие навыка графического изображения условия в затруднительной ситуации. Если ученику решение очевидно сразу, пусть решает как хочет. Потом он легко поймёт смысл чертёжа при разборе. А при малейших затруднениях стоит посоветовать для начала нарисовать условие.

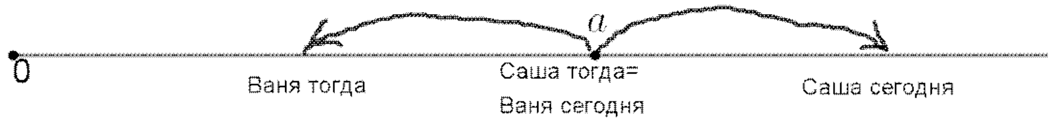
1.1 Эники-Беники. Эники и Беники ели вареники с вишней и с творогом. Эники съели на 35 больше вареников с вишней, чем Беники. А всего вареников Эники съели на 26 больше, чем Беники. Кто съел больше вареников с творогом и на сколько?



Решение. Изобразим вареники с вишней сплошной линией, а с творогом – штриховой. На чертеже порция вареников с творогом для каждого едока состоит из двух частей. Одна часть у них одинаковая, а другая нет. У Беников она составляет 35 вареников, а у Эников – 26 вареников. Поэтому Беники съели больше на 35 – 26 = 9 вареников с творогом.
Ответ: Беники съели на 9 вареников с творогом больше.

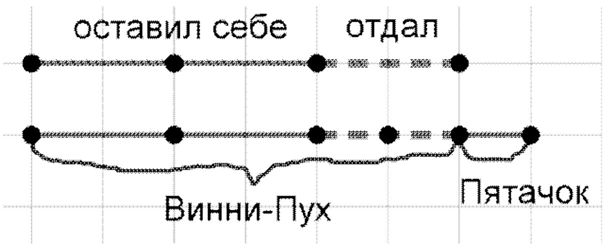
1.2 День рождения. У Саши и Вани дни рождения в один и тот же день. Каждый из них отмечает свой день рождения тортом со свечками по количеству исполнившихся ему лет. В тот год, когда они познакомились, у Саши на торте было столько же свечек, сколько у

Вани сегодня. Известно, что суммарное количество свечек на четырёх тортах Вани и Саши (тогда и сегодня) равно 216. Сколько лет исполнилось Ване сегодня?



Решение 1. В год знакомства Саше исполнилось столько же лет, сколько Ване сегодня. Обозначим это число буквой a и отметим на координатном луче точку с координатой a. На том же луче отметим точки, соответствующие возрасту Вани тогда и возрасту Саши сегодня. Между "тогда" и "сегодня" для Саши и для Вани прошло одинаковое число лет, поэтому длины стрелочек на рисунке одинаковы. Если одно слагаемое на сколько-то увеличить, а другое на столько же уменьшить, их сумма не изменится. Поэтому суммарное количество свечек на четырёх тортах равно $4a = 216$. Тогда $a = 216 : 4 = 54$.
Решение 2. Пусть сегодня на торте у Вани a свечек. В год знакомства, на t лет раньше, на торте у Саши было также a свечек, а на торте Вани было $a - t$ свечек. Следовательно, сегодня на торте у Саши $(a + t)$ свечек. Тогда указанное в условии суммарное количество свечей равно $a + a + (a - t) + (a + t) = 4a$. Таким образом, $4a = 216$, то есть $a = 54$. Значит, сегодня Ване исполнилось 54 года.
Ответ: 54 года.

1.3 Торт. Винни-Пух и Пятачок поделили между собой торт. Пятачок захныкал, что ему досталось мало. Тогда Пух отдал ему треть своей доли. От этого у Пятачка количество торта увеличилось втрое. Какая часть торта была вначале у Пуха и какая у Пятачка?

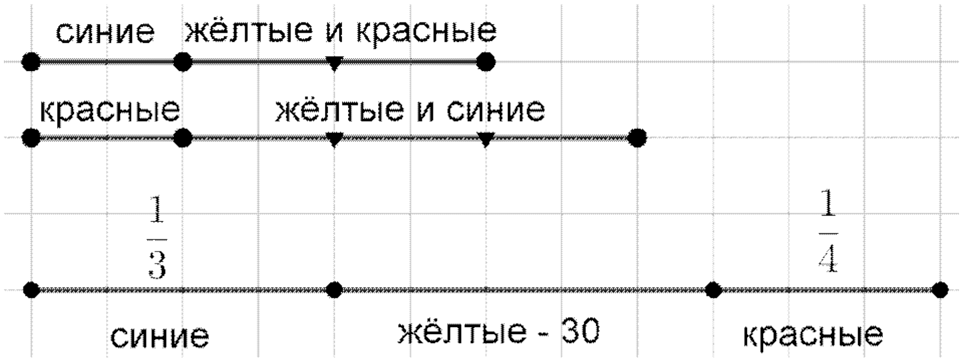


Решение 1. Первый отрезок изображает долю Винни-Пуха: треть её (штриховая линия) он отдал, а две трети (сплошная линия) оставил себе. На втором чертеже нарисован весь торт: доля Пятачка увеличилась втрое, значит, штриховой подарок друга составляет две части, а исходная доля Пятачка одну – вдвое меньше штриховой. Теперь считаем клеточки: Пятачку вначале досталась одна из семи, а Винни-Пуху шесть из семи.
Решение 2. Пусть вначале доля Пятачка составляла x. Потом она увеличилась втрое и стала составлять $3x$. Значит, Винни-Пух отдал Пятачку $3x - x = 2x$. Это треть его доли, а вся его доля равна $6x$. Весть торт составляет $6x + x = 7x$.
Ответ: у Пуха вначале было 6/7 торта, а у Пятачка была 1/7.

Решение задач на части с помощью клеточек вызывает два вопроса. Первый – насколько оно строгое? Этот вопрос касается не сути решения, а языка. Клеточки и другие графические методы помогают осознать условие и увидеть решение. Когда суть понятна, можно при желании называть клеточку (две клеточки и т. д.) частью или даже ввести переменную как в решении 2. Выбор переменной – дело тонкое. Если принять за х долю Винни-Пуха, придётся работать с дробными коэффициентами. А можно даже две переменные ввести (массы первоначальных кусков Винни-Пуха и Пятачка) и искать их отношение. Чертёж помогает не только рассказать решение «на клеточном уровне», но и удачно выбрать переменную и записать то же самое решение «по-взрослому».

Второй вопрос: как выбрать масштаб, чтобы клеточки помогали, а не мешали? В рассмотренной задаче всё так хорошо получилось отчасти оттого, что отданная треть доли Винни-Пуха изображалась двумя клеточками. Поэтому она удобно поделилась пополам, и исходная доля Пятачка соответствует одной клетке. Но *первоначально выбранная длина отрезка может оказаться неудачной, и наглядный чертёж не всегда получается с первого раза. Предлагаем учителю на занятии сначала специально взять неудачную длину отрезка, заметить это и вместе с учениками подобрать нужную. В данном случае треть должна делиться пополам, поэтому долю Винни-Пуха и разумно изобразить отрезком длины 6 (или 12) клеток. Такие упражнения подводят к разумности приведения дробей к общему знаменателю. И впоследствии помогут лучше понять, как и зачем оно делается.*

1.4 Зонтики. Однажды в город пришёл торговец с зонтиками трёх цветов. Синих зонтиков у него было вдвое меньше, чем жёлтых и красных, красных – втрое меньше, чем жёлтых и синих, а жёлтых зонтиков 30. Сколько всего зонтиков было у торговца?



Решение. На верхнем рисунке показано, что синих зонтиков вдвое меньше, чем жёлтых и красных. Этот же рисунок можно истолковать по-другому: синие зонтики составляют треть от всех. Аналогично на втором рисунке показано, что "красных втрое меньше, чем жёлтых и синих. Это означает, что красные зонтики составляют четверть от всех. Нарисуем ниже отрезок, изображающий все зонтики. Чтобы на нём чётко изображались и 1/3, и 1/4, сделаем его длиной 12 клеточек. Тогда синим зонтикам соответствует отрезок в 4 клетки, красным – в 3 клетки, а на долю жёлтых зонтиков останется 12 – 3 – 4 = 5 клеток. Если 30 зонтиков изображаются как 5 клеток, то каждая клетка – это 6 зонтиков, а всего у торговца было $12 \cdot 6 = 72$ зонтика.

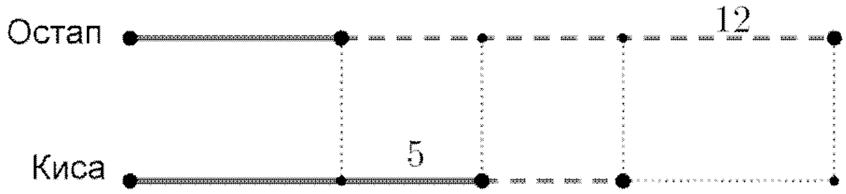
Ответ: 72 зонтика.

Если сложение дробей уже пройдено, то вместо третьего отрезка проще записать действие 1 – 1/3 – 1/4 = 5/12.. А затем найти целое, зная, что 5/12 от него составляют 30 зонтиков.

Задачи для самостоятельного решения

1.5 Раздача слонов. Остап Бендер и Киса Воробьянинов раздавали населению слонов. Утром у Остапа было на 12 слонов больше, чем у Кисы, а к вечеру у Кисы осталось на 5 слонов больше, чем у Остапа. Кто раздал больше слонов за день и на сколько?

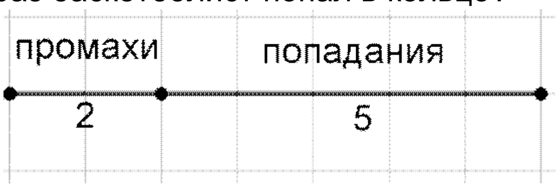
Ответ: Остап раздал больше на 17 слонов.



Решение. Изобразим розданных за день слонов штриховыми отрезками, а оставшихся к вечеру сплошными. Видно, что Остап раздал слонов столько, сколько Киса, и ещё 5 + 12 = 17 слонов.

1.6 Баскетбол. На тренировке баскетболист 140 раз бросал мяч в кольцо. Количество промахов составило 2/5 от числа попаданий. Сколько раз баскетболист попал в кольцо?

Ответ. 100 раз.

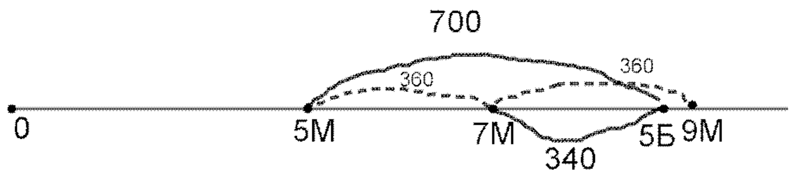


Решение. Изобразим промахи и попадания на рисунке. Видно, что удачные броски составили 5/7 от всех. То есть их было 140 : 7·5 = 100.

1.7 Печенье. Большая пачка печенья на 140 граммов тяжелее маленькой. А пять больших пачек весят на 340 граммов больше, чем семь маленьких. Что весит больше и на сколько: пять больших пачек печенья или девять маленьких?

Ответ: девять маленьких весят больше на 20 граммов.

Решение. Отметим на координатном луче точку 5Б – массу пяти больших пачек печенья. Точка 5М (масса пяти маленьких пачек) расположена на $140 \cdot 5 = 700$ граммов левее. Точка 7М по условию левее, чем 5Б на 340 (г).



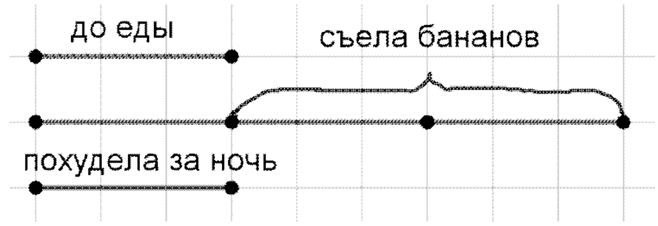
Расстояния между 5М и 7М и между 7М и 9М равны 700 – 340 = 360 (г). Значит, 9 маленьких пачек тяжелее пяти больших на 360 – 340 = 20 (г).

Чертёж в этой задаче может сыграть двойную роль. Сначала помочь разобраться с условием и найти массу двух маленьких пачек печенья. А затем заметить короткое продолжение решения. Вместо этого можно было бы найти массу маленькой пачки: 360 : 2 = 180 (г), а затем и большой: 180 + 140 = 320 (г). Далее найти массу пяти больших пачек печенья и девяти маленьких, после чего вычесть из большего меньшее.

1.8 Крокозябра. У Алисы живет крокозябра. Каждый день она съедает бананов ровно в два раза больше своего веса, а каждую ночь худеет в три раза. Уезжая на четырехдневные каникулы, Алиса оставила ей 40 кг бананов, и этого крокозябре в точности хватило. Сколько весила крокозябра до отъезда Алисы?

Ответ: 5 кг.

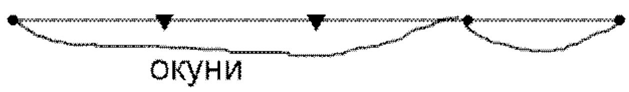
Решение. Нарисуем вес крокозябры утром, после поедания бананов (добавляются два таких же отрезка) и на следующее утро (отрезок уменьшается втрое). Видим, что каждое утро крокозябра весит одинаково. Значит, и бананов она ела все 4 дня поровну: по 40 : 4 = 10 кг. А весит крокозябра по утрам 10 : 2 = 5 кг.



1.9 Рыбы. В пруду водится три вида рыб: окуни, щуки и карпы. Когда у рыбака спросили, сколько он сегодня поймал, он ответил: «Окуней в 3 раза больше, чем остальной рыбы»; «Щук в 9 раза меньше, чем остальной рыбы». Какой процент от всего улова составляют карпы?

Ответ: 15%.

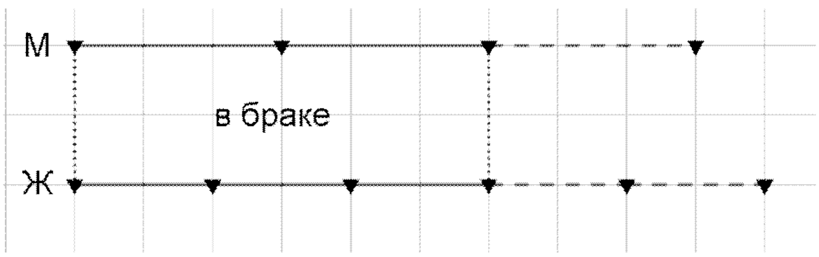
Решение. Изобразим утверждение «Окуней в 3 раза больше, чем остальной рыбы» на отрезке. Видим, что этот же факт можно описать по-другому: окуни составляют 3/4 или 75% всего улова. С помощью аналогичного рисунка понимаем, что щуки составляют 1/10 или 10% всего улова. Тогда карпы составляют оставшиеся 100% – 75% – 10% = 15% улова.



1.10 Население. На острове 2/3 всех мужчин женаты и 3/5 всех женщин замужем. Какая доля населения острова состоит в браке? (*Законы острова допускают брак только между мужчиной и женщиной, живущими на этом острове*)

Ответ: 12/19.

Решение 1. Изобразим всех мужчин и всех женщин с помощью двух отрезков. На первом отрезке



отметим 2/3, на втором – 3/5. По условию 2/3 всех мужчин и 3/5 всех женщин равны одному и тому же числу, то есть отмеченные отрезки должны иметь одинаковую длину. С учётом числителей 2 и 3 удобно изобразить их длиной 6 клеток. Тогда количество мужчин соответствует 9 клеточкам-частям, женщин – 10 частям, а всё население острова – 19 частям. Из них в браке состоит 6 + 6 = 12 частей. То есть в браке состоит 12/19 населения острова.

Решение 2. Пусть количество супружеских пар на острове равно *n*. Из условия задачи следует, что на острове $\frac{5}{3}n$ женщин и $\frac{3}{2}n$ мужчин. Всего на острове $\frac{5}{3}n+\frac{3}{2}n=\frac{19}{6}n$ жителей, из них в браке состоят 2*n*. Искомая доля равна $2n:\frac{19}{6}n=\frac{12}{19}$.