А.Д. Блинков

ГЕОМЕТРИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА
ОБЫЧНАЯ И НЕ ОЧЕНЬ

Часть 2

Издательство МЦНМО

2021

Предисловие

Вторая часть книги «Геометрия для 7 класса ...» также содержит восемь занятий, как и первая, но тематика этих занятий – не вполне обычная. Решение задач занятий 9 – 12 даст возможность школьникам закрепить навыки, полученные при освоении традиционных тем в различных геометрических конструкциях, которые практически отсутствуют в стандартных школьных учебниках. Занятия 13 – 16 посвящены темам, которые не всегда включены в программу 7 класса, но, по нашему убеждению, должны там быть, несмотря на то, что их изучение может вызывать некоторые трудности. Так как они помещены в конце книги, то, в зависимости от уровня технической или логической подготовки учащихся, их изучения можно перенести в 8 класс (по усмотрению преподавателя).

При этом, и во второй части книги отсутствуют занятия, связанные с окружностью (за исключением использования её определения как геометрического места точек), так как в большинстве случаев этот материал не входит в программу 7 класса. Кроме того, задачам, связанным с окружностями посвящена семнадцатая книжка серии «Вписанные углы» (авторы – Ю. Блинков и Е. Горская), первые два занятия которой можно, при желании, использовать для работы с семиклассниками. Отсутствуют и экстремальные задачи, хотя некоторые из них доступны семиклассникам, так как таким задачам планируется посвятить отдельную книжку.

По-прежнему, в материалы каждого занятия входят: вступительный и поясняющий текст учителя, включающий в себя: несколько подробно разобранных типовых задач по теме; упражнения и задачи, которые могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения (как на занятии, так и дома); подробные решения этих задач; методические комментарии для учителя (в том числе, и в начале занятия, поясняющие основное содержание и цели занятия, и содержащие перечень необходимых предварительных сведений).

Отдельным списком представлены дополнительные задачи различного уровня трудности, часть из которых в какой-то степени дублирует задачи, предложенные для занятий, а часть – дополняет их новыми идеями (наиболее сложные задачи отмечены знаком *). Эти задачи можно использовать на усмотрение преподавателя (или обучающегося). Для них также приведены подробные решения. Для удобства, в конце каждого занятия приведен список задач из этого раздела, которые имеет смысл использовать для закрепления материала, контроля его освоения и углубления. Следует учесть, что есть задачи, которые могут быть отнесены к нескольким занятиям (в том числе, из разных частей книги).

Краткое содержание и цели занятий.

Занятие 9. Разобьем на равнобедренные треугольники. Большая часть задач, предлагаемых на этом занятии, лежит на стыке классической и комбинаторной геометрии. Разбор и решение этих задач послужит формированию у школьников комбинаторного мышления при рассмотрении несложных геометрических конструкций. Помимо этого, приобретаются навыки простейших оценок на основании теорем о сумме углов и внешнем угле треугольника. Отдельное внимание уделяется умению строить примеры и контрпримеры, продолжая «линию» прошлого занятия. Для решения предложенных задач достаточно знаний, умений и навыков, полученных на предыдущих занятиях, в частности, умения считать углы и применять свойства и признаки равнобедренного и прямоугольного треугольников.

Занятие 10. Геометрия на клетчатой бумаге. Основная идея этого занятия – применение накопленных навыков и умений в нестандартной ситуации. Решение и разбор задач этого занятия призван не только закрепить эти навыки, но и направлен на развитие геометрического воображения школьников. Основное внимание уделено построениям на клетчатой бумаге и их обоснованиям, а также вычислению углов и сумм углов. При желании занятие можно дополнить упражнениями на вычисление площадей фигур, изображенных на клетчатой бумаге, а также задачами на треугольной сетке (из раздела дополнительных задач).

Занятие 11. Перегибая бумагу, получаем задачу. Это занятие так же, как и предыдущее, ориентировано на применение накопленных навыков и умений в нестандартных ситуациях. Основу занятия составляют задачи, возникающие при перегибании листа бумаги. Они привлекательны своей естественностью и давно вошли в практику различных математических олимпиад, причем это задачи и на построение, и на доказательство, и на вычисление. Решение и разбор таких задач позволяет также закрепить наглядные представления о фигурах, симметричных относительно прямой, и показать возможность применения симметрии для строгих рассуждений.

Занятие 12. Квадраты. Посвящено задачам, в которых используются простейшие свойства квадрата. Наличие квадратов в условиях задач даёт возможность повторить и закрепить навыки, выработанные на предыдущих занятиях: применение свойств равнобедренных и прямоугольных треугольников и параллельности; использование дополнительных построений, в частности, симметрии для получения равных треугольников или для счёта углов. В ряде задач рассматривается комбинации квадратов с равнобедренными или равносторонними треугольниками, что позволяет не только повторить некоторые уже встречавшиеся приёмы, но и познакомить школьников с новым методом решения задач, который принято называть «обратным ходом».

Занятие 13. Неравенство треугольника. Основная цель этого занятия – научить школьников применять неравенство треугольника в различных геометрических конструкциях. Рассматриваются как задачи с числовыми данными, так и доказательство неравенств общего вида. Решение некоторых задач даёт возможность вновь обратиться к типовым дополнительным построениям, которые встречались на предыдущих занятиях. Кроме того, разбор и решение предлагаемых задач позволяет отработать элементарные алгебраические навыки работы с неравенствами.

Занятие 14. Соответствия между длинами сторон и величинами углов треугольника. Основное содержание этого занятия – задачи, для решения которых применяются простейшие соотношения между сторонами и углами треугольника: напротив большей стороны треугольника лежит больший угол и утверждение, обратное этому. Так как в школьных учебниках эти факты, как правило, не выделяются, то в начале занятия приведено их доказательство. Помимо прочего, освоение предложенного материала позволяет повторить важное следствие из теоремы о внешнем угле треугольника, а также строго доказать неравенство треугольника.

Занятие 15. Геометрические места точек. Приоритетная цель этого занятия – повторить основные геометрические места точек на плоскости и научиться с их помощью решать задачи на поиск других геометрических мест точек. Отдельное внимание уделено двум возможным типам рассуждений при решении таких задач: доказательству взаимно обратных утверждений и построению цепочки равносильных утверждений. Некоторые задачи этого занятия дают возможность для повторения свойств и признаков равнобедренного и прямоугольного треугольников и материала занятия 14, а другие позволяют, при желании, обоснованно ввести понятия описанной, вписанной и вневписанных окружностей для треугольника.

Занятие 16. Применение геометрических мест точек. Содержание этого занятия – задачи, для решения которых используются серединный перпендикуляр к отрезку и биссектриса угла в качестве геометрических мест точек. В отличие от задач занятия 15, в условиях задач не используется словосочетание ГМТ. Отдельная цель – приобретение учащимися навыков точных и грамотных ссылок на используемые геометрические места точек в процессе обсуждении решений. Кроме того, некоторые задачи этого занятия дают возможность рассмотреть геометрические конструкции, которые ранее почти не встречались.

По традиции, в конце книжки все занятия представлены в виде дидактических материалов. Понятно, что преподаватель математического кружка (или учитель на уроках или факультативных занятиях) может по своему усмотрению использовать только часть предложенных занятий, поменять порядок их изучения, и т. д.

Выражаю благодарность всем авторам книг и статей, указанных в списке литературы, а также авторам всех использованных задач (многих из которых установить, к сожалению, не удалось).

Автор благодарен Ю.А. Блинкову, М.А. Волчкевичу и Д.В. Прокопенко, в чьих материалов были найдены некоторые задачи, а также всем школьникам, на занятиях с которыми этот материал был апробирован и «протестирован»

Кроме того, Ю. Блинков, будучи редактором книги, оказал существенное влияние на идеологию, компоновку материалов и улучшение текста. Ряд важных замечаний от редактора серии А.В. Шаповалова также способствовало улучшению текста книги. Отдельная благодарность В. Шувалову за профессиональную верстку и выполнение чертежей.

Занятие 9

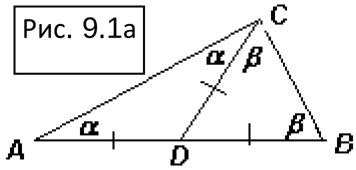
Разобьем на равнобедренные треугольники

Большая часть задач, предлагаемых на этом занятии, лежит на стыке классической и комбинаторной геометрии. Разбор и решение этих задач послужит формированию у школьников комбинаторного мышления при рассмотрении несложных геометрических конструкций. Помимо этого, приобретаются навыки простейших оценок на основании теорем о сумме углов и внешнем угле треугольника. Отдельное внимание уделяется умению строить примеры и контрпримеры, продолжая «линию» прошлого занятия. Для решения предложенных задач достаточно знаний, умений и навыков, полученных на предыдущих занятиях, в частности, умения считать углы и применять свойства и признаки равнобедренного и прямоугольного треугольников.

В геометрии часто встречаются задачи, в которых прямая разбивает (разрезает) треугольник на два равнобедренных треугольника. Основная трудность при их решении – возникает много случаев и какой-нибудь из них легко упустить. Поэтому имеет смысл провести небольшое ***исследование***: какие случаи возможны и какую информацию в каждом из них можно получить об углах исходного треугольника.

Для того, чтобы при разрезании треугольника получилось два треугольника, разрез должен проходить через вершину. Пусть в треугольнике *ABC* отрезок *CD* разбивает его на два равнобедренных треугольника *ACD* и *BCD*. Тогда хотя бы один из углов *ADC* или *BDC* не будет острым. Для определенности можно считать, что $\angle ADC \geq 90^\circ$, тогда основанием равнобедренного треугольника *ACD* может являться только отрезок *AC* (см. рис. 9.1 а – в).

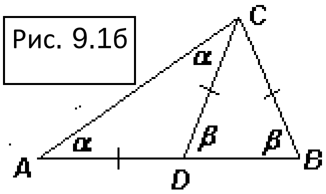
Рис. 9.1а



В треугольнике *BCD* любая из сторон может служить основанием, поэтому и возникают три случая. Обозначив углы *A* и *B* исходного треугольника через α и β соответственно и отметив равные стороны и углы при основаниях в равнобедренных треугольниках, получим:

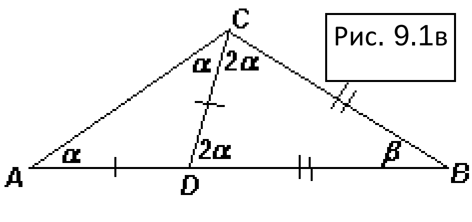
1) *BC* – основание треугольника *BCD* (см. рис. 9.1а). Тогда медиана *CD* в два раза меньше, чем *AB*, значит, $\angle$***ACB* = 90°**. Таким образом, треугольник *ABC* – прямоугольный, **α и β – острые углы, сумма которых равна 90°**.

Рис. 9.1б



2) *BD* – основание треугольника *BCD* (см. рис. 9.1б). Тогда угол *BDC* – внешний для треугольника *ACD*, значит, $\beta = 2\alpha$, причем оба этих угла острые, значит, **α < 45°**. Угол *ACB* может быть острым, прямым или тупым, но $\angle$***ACB*** = $180^\circ - 3\alpha$ **> 45°**.

Рис. 9.1в



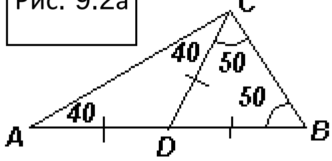
3) *CD* – основание треугольника *BCD* (см. рис. 9.1в). Тогда $2\alpha < 90^\circ$, то есть **α < 45°**, $\beta = 180^\circ - 4\alpha$ и может быть любого вида. Угол *ACB* также может иметь любой

вид, но $\angle ACB = 3\alpha$, поэтому $\boldsymbol{\angle ACB < 135°}$.

Посмотрим, как полученные результаты могут помочь при решении конкретной задачи.

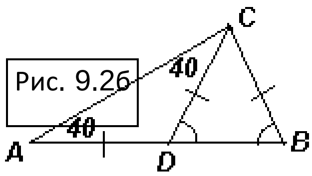
Пример 9.1. Один из углов треугольника равен 40°. Известно, что его можно разбить отрезком на два равнобедренных треугольника. Найдите остальные углы данного треугольника.

Рис. 9.2а



Решение. Пусть ABC – данный треугольник. Согласно сказанному выше, рассмотрим три случая, соответствующие случаям исследования с той же нумерацией. При разборе каждого из них будут возникать три варианта, в зависимости от того, какой именно угол треугольника равен 40°.

Рис. 9.2б



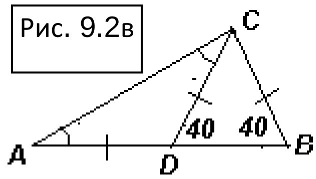
1) $\angle C = 90°$; $\angle A = 40°$; $\angle B = 50°$ (см. рис. 9.2а).

Случай $\angle B = 40°$ невозможен, так как $\angle ADC \geq 90°$.

2) Если $\angle A = 40°$, то $\angle B = \angle CDB = 80°$; $\angle C = 60°$ (см. рис. 9.2б).

Если $\angle B = 40°$, то $\angle CDB = 40°$; $\angle A = \angle ACD = 20°$, $\angle C = 120°$ (см. рис. 9.2в).

Рис. 9.2в

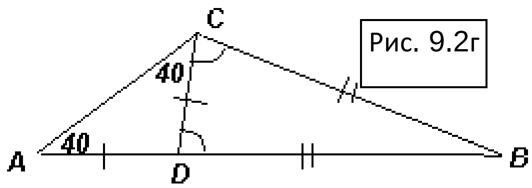


Случай $\angle C = 40°$ невозможен, так как этот угол должен быть больше, чем 45°.

3) Если $\angle A = 40°$, то $\angle CDB = 80° = \angle DCB$; $\angle B = 20°$, $\angle C = 120°$ (см. рис. 9.2г).

Если $\angle B = 40°$, то то $\angle CDB = \angle DCB = 70°$; $\angle A = \angle ACD = 35°$, $\angle C = 105°$ (см. рис. 9.2д).

Рис. 9.2г



Если $\angle C = 40°$, то $\angle DCB = 2\angle ACD$, $\angle A = \angle ACD = \frac{40°}{3}$, $\angle B = \frac{380°}{3}$ (см. рис. 9.2е).

Рис. 9.2д

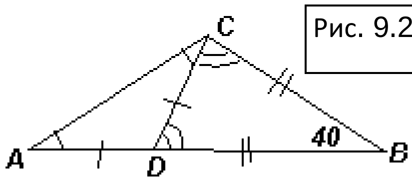
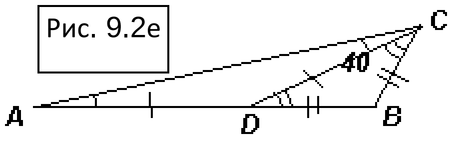


Рис. 9.2е



Ответ: 90° и 50°; 60° и 80°; 120° и 20°; 105° и 35°, $\frac{40°}{3}$ и $\frac{380°}{3}$.

Сформулируем теперь основные принципы, помогающие при переборном решении похожих геометрических задач. Для того, чтобы не пропустить какой-либо случай, полезно до начала перебора перечислить все логически возможные случаи. Это обычно делается так: каждая возможная картинка однозначно определяется какими-то параметрами. Перечислим все возможные комбинации параметров, а затем начнём перебор. Невозможные комбинации пусть отсеются по ходу.

Можно ещё после формирования списка, но до начала перебора, обратить внимание на какое-то свойство, с помощью которого отсеять или «склеить» какие-то группы случаев.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

9.1. Два угла треугольника равны 100° и 60°. Покажите, как его разрезать на два равнобедренных треугольника.

9.2. Верно ли, что любой треугольник можно разбить на четыре равнобедренных треугольника?

9.3. Про треугольник, один из углов которого равен 120°, известно, что его можно разрезать на два равнобедренных треугольника. Чему могут быть равны два других угла исходного треугольника?

9.4. Треугольник *ABC* можно разрезать на два равнобедренных треугольника двумя способами, проводя прямые через вершину *C*. Найдите углы треугольника *ABC*.

9.5. Прямая разрезает равнобедренный треугольник на два равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника.

9.6. В треугольнике *ABC* биссектриса угла *C* пересекает сторону *AB* в точке *M*, а биссектриса угла *A* пересекает отрезок *CM* в точке *T*. Оказалось, что отрезки *CM* и *AT* разбили треугольник *ABC* на три равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника *ABC*.

9.7. Равносторонний треугольник разрезали на пять равнобедренных треугольников. Обязательно ли все углы получившихся треугольников измеряются целым числом градусов?

Ответы, решения, комментарии

9.1. Ответ: см. рис. 9.3.

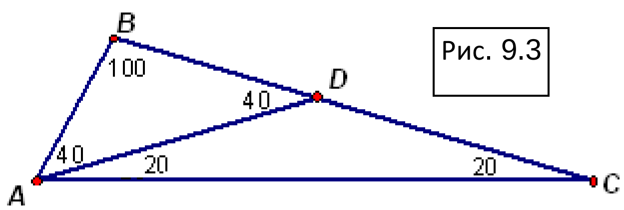
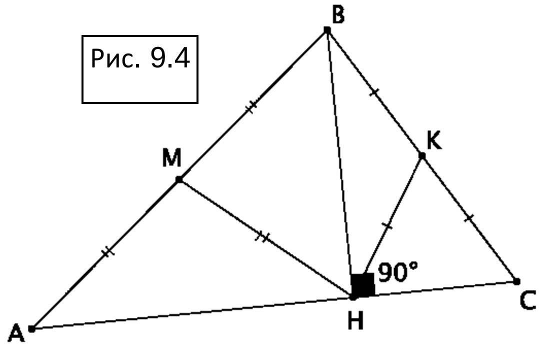


Рис. 9.3

9.2. Ответ: верно.

В любом треугольнике высота, проведенная к наибольшей стороне, лежит внутри треугольника. Рассмотрим треугольник *ABC*, в котором *AC* – наибольшая сторона, и проведем его высоту *BH* (см. рис. 9.4). Она разбивает исходный треугольник на два прямоугольных треугольника. В этих прямоугольных треугольниках проведем медианы *HM* и *HK* к гипотенузам. Они разобьют каждый прямоугольный треугольник на два равнобедренных треугольника.

Рис. 9.4



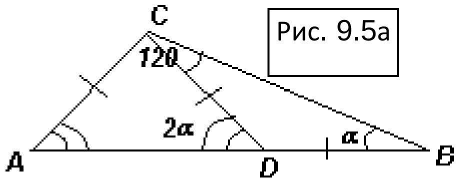
Таким образом, произвольный треугольник *ABC* разобьется на 4 равнобедренных треугольника: *AMH*, *BMH*, *BKH* и *CKH*

9.3. Ответ: 40° и 20° или 45° и 15°.

Здесь возможны два случая: разрез проходит через вершину данного угла или через вершину другого. Разобраться внутри каждого из них поможет проведённое ранее исследование.

Пусть в треугольнике *ABC* угол *C* равен 120°. Если разрез, проходит через вершину *C*, то возможны только два случая, соответствующие рис. 9.1б и 9.1в.

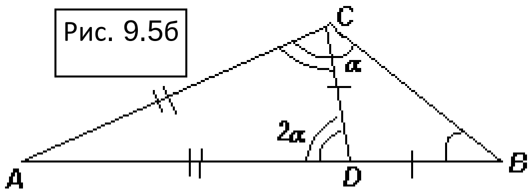
Рис. 9.5а



1) $BD = CD = CA$ (см. рис. 9.5а). Тогда $\angle DBC = \angle DCB = \alpha$, $\angle CAD = \angle CDA = 2\alpha$. Значит, $2\alpha + \alpha = 60$; $\alpha = 20$.

Таким образом, $\angle B = 20°$, $\angle A = 40°$.

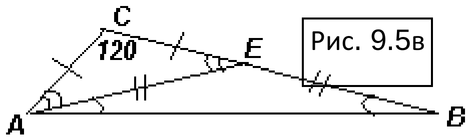
Рис. 9.5б



2) $BD = CD$ и $AC = AD$ (см. рис. 9.5б). Тогда $\angle DBC = \angle DCB = \alpha$, $\angle ACD = \angle ADC = 2\alpha$. Значит, $\angle ACB = 3\alpha$, то есть $\alpha = 40°$. Таким образом, $\angle B = 40°$, $\angle ACD = \angle ADC = 80°$, $\angle A = 20°$.

Если же разрез проходит через вершину *A* или вершину *B*, то угол при этой вершине должен быть больше другого. Пусть *AE* – линия разреза (см. рис. 9.5в). Тогда оба образовавшихся треугольника будут тупоугольными. Получим, что $AC = CE$ и $AE = EB$. Следовательно, $\angle CAE = \angle CEA = (180° - \angle C) : 2 = 30°$, а $\angle EAB = \angle EBA = 0{,}5\angle CEA = 15°$. Таким образом, $\angle B = 15°$, $\angle A = 45°$.

Рис. 9.5в



9.4. **Ответ**: 20°, 40° и 120° или 36°, 36° и 108°.

И в этой задаче удобно проводить разбор случаев в соответствии с исследованием.

Заметим, что если к разрезу, показанному на рис. 9.1а, добавить второй требуемый разрез, соответствующий либо рис. 9.1б, либо рис. 9.1в, то получится треугольник с углами 90°, 60° и 30°. Для такого треугольника все три способа разрезания, указанных в исследовании, совпадают.

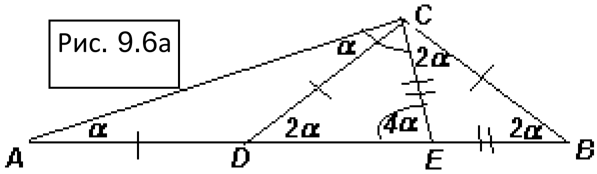


Рис. 9.6а

Добавим второй разрез CE к случаю, показанному на рис. 9.1б, учитывая, что $\beta = 2\alpha$ (см. рис. 9.6а). Так как угол AEC – внешний для треугольника BEC, то $\angle AEC > \angle BEC = 2\alpha > \angle EAC = \alpha$. Следовательно, AE не может оказаться основанием равнобедренного треугольника ACE. Сторона AC также не может быть основанием этого треугольника, так как $\angle ACE \neq \angle ACD = \angle CAE$. Значит, $AC = AE$. Тогда угол AEC – острый, поэтому основанием равнобедренного треугольника BEC является BC.

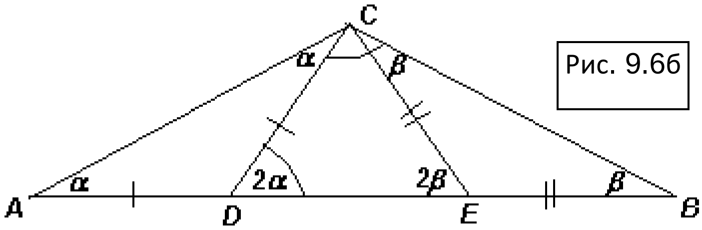


Рис. 9.6б

В этом случае, $\angle ACE = \angle AEC = 4\alpha$. Тогда значение α можно найти, например, по сумме углов треугольника ACE: $\alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180°$; $\alpha = 20°$. Следовательно, углы исходного треугольника: 20°, 40° и 120°.

Второй разрез можно добавить и на рис. 9.1в (см. рис. 9.6б). Тогда, учитывая, что $\angle BCD = \angle BDC = 2\alpha$ и $\angle ACE = \angle AEC = 2\beta$, получим: $\angle ACB = 3\alpha = 3\beta$, то есть $\alpha = \beta$. Значит, треугольник ABC – равнобедренный, $\alpha + \alpha + 3\alpha = 180°$; $\alpha = 36°$. В этом случае углы исходного треугольника: 36°, 36° и 108°.

9.5. Ответ: 45°, 45°, 90° или 36°, 36°, 108° или 72°, 72°, 36° или $\frac{540^\circ}{7}$, $\frac{540^\circ}{7}$, $\frac{180^\circ}{7}$.

Пусть в треугольнике ABC равны стороны CA и CB. Указанная прямая может проходить либо к основанию, либо к одной из боковых сторон. Внутри каждого из этих случаев возможны два варианта получения равнобедренных треугольников (*см. исследование*).

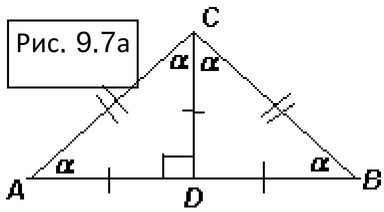


Рис. 9.7а

Пусть CD – указанный разрез. Тогда возможны два случая:

1) $AD = BD = CD$ (см. рис. 9.7а). Тогда $\angle C = 90°$, $\angle A = \angle B = 45°$.

2) $AD = CD$ и $BC = BD$ (см. рис. 9.7б). Тогда $\alpha + \alpha + 3\alpha = 180°$; $\alpha = 36°$. Значит, $\angle A = \angle B = 36°$, $\angle C = 108°$.

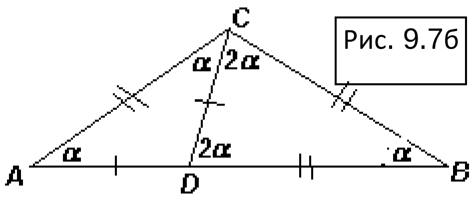


Рис. 9.7б

Отметим, что такой треугольник уже возникал при решении задачи 9.4.

Пусть теперь разрез AD проходит к боковой стороне CB. И здесь возможны два случая.

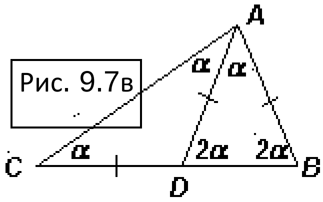


Рис. 9.7в

3) $AB = AD = CD$ (см. рис. 9.7в). Тогда $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$; $\alpha = 36°$. Значит, $\angle C = 36°$, $\angle A = \angle B = 72°$.

Полезно обратить внимание учащихся на тот факт, что углы исходного треугольника такие же как углы треугольника ABD.

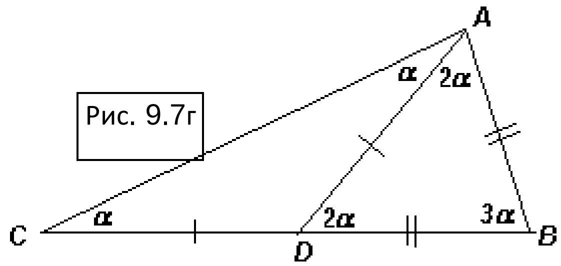


Рис. 9.7г

4) $AD = CD$ и $AB = BD$ (см. рис. 9.7г). $\alpha + 3\alpha + 3\alpha = 180°$; $\alpha = \dfrac{180°}{7}$. Значит, $\angle C = \dfrac{180°}{7}$, $\angle A = \angle B = \dfrac{540°}{7}$.

Отметим, что в двух случаях разрезающая треугольник прямая является биссектрисой угла, из вершины которого она проведена, а в двух других она делит этот угол в отношении 1 : 2.

9.6. Ответ: два угла по 72° и угол 36°.

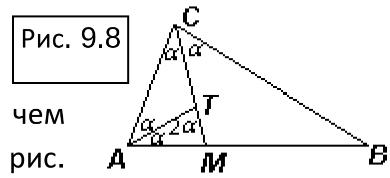


Рис. 9.8

Так как сумма углов A и C треугольника ABC меньше, чем 180°, то $\angle TAC + \angle TCA < 90°$, поэтому угол ATC – тупой (см. рис. 9.8). Значит, в равнобедренном треугольнике ATC сторона AC является основанием. Тогда $\angle TAC = \angle TCA = \alpha$, поэтому $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$. Угол ATM – внешний для треугольника ATC, значит, $\angle ATM = 2\alpha$.

Рассмотрим теперь равнобедренный треугольник ATM. Если ATM – его угол при вершине, то $\angle TMA = \angle TAM = \alpha$, тогда сумма углов этого треугольника равна 4α, и равна 180°, но это невозможно, поскольку в этом случае и сумма углов A и C исходного треугольника будет равна 180°. Значит, ATM – угол при основании этого треугольника. В этом случае сумма углов треугольника ATM равна 5α. Из равенства $5\alpha = 180°$ получим, что $\alpha = 36°$, тогда $\angle BAC = \angle BCA = 72°$, $\angle ABC = 180° - (\angle BAC + \angle BCA) = 36°$.

В этом случае треугольник CMB (третий треугольник разбиения) также оказывается равнобедренным, так как $\angle MCB = \angle MBC = 36°$.

Отметим, что можно проводить аналогичные рассуждения, рассматривая треугольники разбиения в другом порядке. Также отметим, что описанная ситуация оказалась возможной, так как отрезок CM отсекает от треугольника ABC треугольник CAM с такими же углами, как у исходного, что уже встречалось при решении задачи 9.5.

9.7. Ответ: не обязательно.

На биссектрисе угла B равностороннего треугольника ABC отметим точку P так, что $\angle APC = 135°$ (см. рис. 9.9а). Тогда треугольник APC – равнобедренный с углом 22,5° при основании. На сторонах AB и BC отметим точки E и D соответственно так, что $BE = BD = BP$ и получим равнобедренные треугольники PBE и PBD с углами при основании 75°.

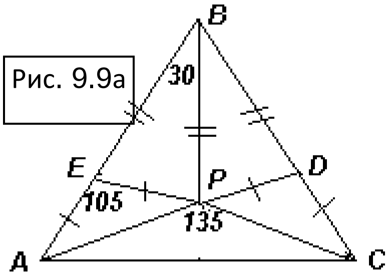


Рис. 9.9а

Докажем, что треугольники PEA – равнобедренный. Действительно, $\angle PEA = 105°$, $\angle PAE = 60° - 22{,}5° = 37{,}5°$, значит, $\angle APE = 37{,}5° = \angle PAE$. Треугольник PDC симметричен треугольнику PEA относительно прямой BP, поэтому он также равнобедренный.

Таким образом в трех из пяти треугольников есть углы, которые измеряются не целым числом градусов.

Возможно и другое рассуждение, которое выходит за рамки программы 7 класса. Пусть отрезок $MN \parallel AC$ *и* $MN < 0{,}5AC$ *(см. рис. 9.9б). Тогда вокруг равнобокой трапеции* $AMNC$ *можно описать окружность, центр* O *которой лежит внутри трапеции. Треугольник* MBN *– равносторонний, а треугольники* AOM, MON, CON *и* AOC *– равнобедренные. Тогда найдется такое положение отрезка* MN*, для которого какие-то углы равнобедренных треугольников не будут измеряться целым числом градусов.*

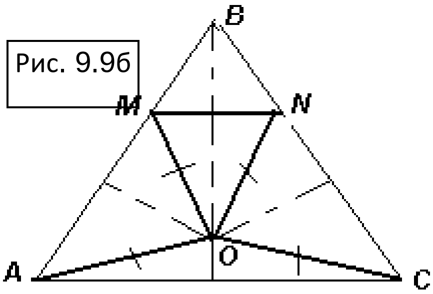


Рис. 9.9б

Можно также использовать задачи Д93 – Д101.

Дополнительные задачи

Д93. Биссектриса *BD* треугольника *ABC* отсекает от него равнобедренный треугольник *BCD*, а биссектриса *CE* отсекает от *ABC* тупоугольный равнобедренный треугольник *ACE*. Найдите углы треугольника *ABC*.

Д94. Вершину треугольника назовём «удачной», если биссектриса, исходящая из неё, равна одной из выходящих из неё же сторон. У треугольника есть две «удачные» вершины. Обязательно ли он равнобедренный?

Д95. Диагональ четырехугольника делит его на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Докажите, что в этом четырехугольнике есть хотя бы две параллельные стороны.

Д96. Каждая из двух прямых разбивает выпуклый четырехугольник на два равнобедренных треугольника. Обязательно ли все стороны четырехугольника между собой равны?

Д97. Про четырехугольник известно, что существуют две прямые, каждая из которых разбивает его на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Обязательно ли он является квадратом?

Д98*. Существуют ли четырехугольник и три такие прямые, каждая из которых разделит четырёхугольник на два равнобедренных треугольника?

Д99*. Существует ли равнобедренный треугольник, который можно разбить на три треугольника так, чтобы из любых двух можно было опять сложить равнобедренный треугольник?

Д100. Треугольник, один из углов которого равен $40°$, разрезали по его биссектрисам на шесть треугольников, среди которых есть прямоугольные. Какими могли быть остальные углы исходного треугольника?

Д101*. Можно ли равносторонний треугольник разрезать на пять равнобедренных треугольников, среди которых нет треугольников с одинаковым набором величин углов?

Литература и веб-ресурсы

1. Е.В. Бакаев. Комбинации квадратов. «Квант», №7/2018

2. А.Д. Блинков. Геометрия на клетчатой бумаге. «Квантик», №№9 – 11/2015.

3. А.Д. Блинков. Перегибая бумагу, получаем задачу. «Квантик», №9/2016.

4. А.Д. Блинков. Разобьем на равнобедренные. «Квантик», №3/2018.

5. М.А. Волчкевич. Уроки геометрии в задачах (7 – 8 классы). – М.: МЦНМО, 2016

6. Р.К. Гордин. Геометрия. Планиметрия. 7 – 9 классы. Учебное пособие. – М.: МЦНМО, 2004

7. Задачи Математического праздника: http://olympiads.mccme.ru/matprazdnik/prob.html

8. Задачи Московской математической олимпиады: http://olympiads.mccme.ru/mmo/books/index.htm

9. Задачи Устной городской олимпиады для 7 классов: http://olympiads.mccme.ru/ustn/

10. Избранные задачи окружных олимпиад по математике в Москве / Составитель А.Д. Блинков. МЦНМО, 2015

11. Материалы турниров математических боев имени А.П. Савина: http://tursavin.ru/problems.html

12. Московские математические регаты. Ч 1, 2 / Составители А.Д. Блинков, Е.С. Горская, В.М. Гуровиц. – М.: МЦНМО, 2014

13. А. Оноприенко. Геометрия на клетчатой бумаге. «Квант», №11/2018

14. Проект «Задачи»: www.problems.ru

15. В.В. Произволов. Задачи на вырост. – М.: Бюро Квантум, 2003

16. С.Е. Рукшин. Математические соревнования в Ленинграде – Санкт-Петербурге (первые пятьдесят лет). Ростов на Дону, издательский центр «МарТ», 2000

17. Д.В. Фомин Санкт-Петербургские математические олимпиады. – СПб.: Политехника, 1994