А.В.Шаповалов

Математические конструкции: от хижин к дворцам

Предисловие

Задачи на придумывание конструкций часто ставят в тупик школьников, привыкших, что в математике «всё задается однозначно». Но фантазия – такая же неотъемлемая часть математики, как строгость и логичность. И задачи на конструкцию учат применять фантазию в соединении со строгостью и логичностью.

В предыдущей книге автора «Как построить пример?» (см. [2]) разобраны наиболее простые приемы решения задач на конструкцию: «Как такое может быть?!», «Ищи там, где легче», «Высматривай знакомое», «Используй повторяемость» «Используй симметрию». Данная книга расширяет этот список, вводя приемы посложнее и помощнее.

Для решения большинства задач этой книги (и понимания приведенных в книге решений) не требуется знаний, выходящих за рамки школьных программ 6 класса. Тем не менее, значительная часть решений требует определенной математической культуры, которую вряд ли можно ожидать на первом году занятий математического кружка. Поэтому автор считает, что книга будет полезна для школьников 6-8 и более старших классов, уже имеющих опыт обучения в математических кружках.

Книга содержит пять тематических занятий математического кружка. В материалы каждого занятия входят: вступительный текст учителя, подробный разбор нескольких задач по теме занятия (включающий решения и комментарии), задачи для самостоятельного решения, решения этих задач с комментариями. В конце некоторых занятий добавлен текст, озаглавленный «Идеология»: мысли и советы, позволяющие расширить и углубить контекст занятия.

Первые три занятия содержат по 10 задач и ориентированы на учеников 6-7 класса, а два последних занятия – для 7-8 класса и в них – по 12 задач. Есть ещё раздел «Дополнительные задачи», и там, среди прочего, есть задачи и для школьников постарше: сотня задач на конструкции сгруппированы по классам: 6-7, 7-8, 8-9 и 9-11; наиболее сложные отмечены звёздочкой *. Такая подборка даёт руководителю кружка возможность адаптировать занятие к возрасту и уровню подготовки школьников за счет замены некоторых основных задач дополнительными. С этой целью в конце каждого занятия приводятся списки задач из дополнительного раздела, а также из других занятий; задачи списка могут быть решены с использованием методов текущего занятия. Впрочем, большинство задач можно решить разными методами, поэтому одна и та же задача может фигурировать в нескольких списках.

В конце книги приведен раздаточный материал.

Текст брошюры рассчитан более на учителя, чем на школьника. Нормальный школьник предпочитает решать без подробной записи и обсуждать решения устно. Готовность читать рассуждения на тему «Как можно найти решение» приходит только с накоплением опыта. Чтобы комментарии и общие идеи книги всё же доходили до ученика, учителю стоит включать почерпнутые в этой брошюре идеи в обсуждения.

Решения задач и *пути к решению* тщательно разделены. Этим автор хотел подчеркнуть, что в задачах на конструкцию готовое решение (то, что школьник в идеале должен написать) и путь к решению (пояснение, как такое придумать) обычно имеют мало общего[1]. Соответственно, и школьников полезно учить разделять эти моменты. Тем более, что такое разделение может пригодиться и при решении математических задач других типов.

Первые пять задач каждого занятия – это примеры для коллективного обсуждения. Сложность их различна: первые обычно – одноходовки, последние школьники, скорее всего, решить не успеют. Но даже если школьникам самим не удаётся быстро найти *нужное* решение, стоит его подсказать, в любом случае – разобрать на доске и показать на его примере работу *приёмов.*

Задачи для самостоятельного решения учителю стоит обсуждать индивидуально со школьниками, так или иначе продвинувшимися в их решении.

Соглашение о формулировках. Если в условии требуется *построить*, *разрезать*, *расставить*, то поиск *всех возможных вариантов не требуется* (а если он нужен, это специально оговаривается).

Автор благодарен К.А.Кнопу за содержательные обсуждения и предложенные задачи, позволившие существенно улучшить данную книгу.

Введение

Автор убежден, что построение и исследование конструкций составляет существенную часть *математики*, а, значит, это должно составлять существенную часть *обучения математике*. Такое обучение позволяет решить две проблемы: поддерживать достаточно долго интерес к математике и повысить эффективности обучения.

Проблема интереса упирается в абстрактный характер математики. Именно абстрактность со временем начинает вызывать отторжение даже у очень сильных и успешных учеников. Традиционное «академичное» преподавание создает несоответствие между богатством математических формул, теорем и методов и бедностью их приложений за пределами математики. Неудивительно, что многим ученикам и студентам математика начинает казаться чем-то вроде «игры в бисер», и относится к ней они начинают соответственно.

Не надо забывать, что вся математика возникла из практического опыта, как его развитие. Да, связи «житейского» и «математического» далеко не так просты, но они никуда не делись. А главное: знаний об окружающем мире у школьников в миллиарды раз больше, чем математических! И отказываться от этих знаний – все равно что отказываться дышать воздухом атмосферы и переходить на дыхание из кислородного баллона.

Но хотя, на взгляд автора, и окружающая действительность и смежные дисциплины пронизаны математикой, он понимает, что в рамках урока даже межпредметные связи навести весьма непросто. И тут на помощь приходят

---

[1] Собственно, и в задачах на доказательство мало общего между решением и поиском решения. Но там элементы пути к решению оставляют в тексте решения или вкрапляют в него из педагогических соображений: без них понять текст будет намного труднее. В результате, увы, затушевывается характерное для всякой математической деятельности различие: между *строгой* логикой готового результата и *креативной* логикой *восхождения к решению*.

задачи на конструкции. Их тематика весьма разнообразна и может быть легко привязана к интересам учащихся, а постановки задач «построить», «возможно ли», «какое наименьшее количество нужно, чтобы» и т.п. выглядят куда более мотивированными. В то же время, инструментарием для исследования конструкций служат все те «абстрактные и теоретические» теоремы и методы, которые мы и хотим преподать учащимся.

Проблема эффективности обучения – это проблема применения полученных знаний и навыков. Рядовой учитель посвящает основное время обучению математическим формулам, понятиям и теоремам и отработке навыков работы с ними. О применении этих теорем за пределами ограниченного списка задач речь обычно не идет. Но ведь это как если бы строителей учили бы обработке кирпичей и досок, но не учили бы строить дома!

В результате навыки и понятия зачастую оказываются усвоенными поверхностно. Они оторваны от здравого смысла и редко применяются за пределами профессиональной деятельности, да и в такой деятельности применение сведено к нескольким стандартным схемам. Стоит ли после этого удивляться феномену кандидатов физико-математических и технических наук, не способных решить задачу C6 ЕГЭ только потому, что конструкция этой задачи им раньше не встречалась.

Между тем, в практической деятельности задача сконструировать что-то, сварить обед, составить маршрут или план и т.п. встречается гораздо чаще, чем что-то пересчитать, решить уравнение или доказать. Сплошь и рядом нам приходится сталкиваться с какими-то практические ситуациями впервые в жизни, и ничего – справляемся. Вот это-то умение можно и нужно использовать и при обучении математике. И хорошим средством служат именно задачи на конструкцию.

Кроме того, в процессе придумывания действует не столько математическая логика, сколько фантазия. И ограничивать ее «пятачком» математического опыта неразумно. Черпать идеи можно и нужно не только из слов учителя или книг, но и непосредственно из окружающего мира. В конце концов, лишь сотые доли процента школьников станут профессиональными «чистыми» математиками. Остальным, если уж придётся применять свои знания и навыки, то в прикладной математике, программировании, других науках и вне науки. Так давайте учить их так, чтобы им эти навыки пригодились в любом случае.

В частности, будем учить их придумывать примеры так, чтобы изобретательность как минимум сохранялась, а строгость ей не только не мешала, но чем дальше, тем больше помогала. Автор старался классифицировать приемы придумывания конструкций и показать, что они коренятся в житейском опыте. В решениях продемонстрировано, что классические кружковые темы «Чётность», «Принцип Дирихле», «От противного», «Решение с конца», «Делимость», «Остатки», «Инвариант» и «Полуинвариант» с тем же успехом работают при построении явных примеров, что и при доказательстве невозможности или неконструктивном доказательстве существования.

Простейшие приёмы придумывания конструкций были разобраны в книге автора «Как построить пример?». О них полезно помнить и при решении задач данной книги. Коротко напомним их.

Как такое может быть? Спросите себя: «Какими свойствами должна обладать конструкция?». Дополнительное знание может сильно сузить круг поисков или осветить дорогу.

Ищи где удобнее. Если хватает одного примера, ищи сначала там, где удобнее. Используй здравый смысл, естественные соображения. Это ограничивают число вариантов, зато ускоряют поиск.

Высматривай знакомое. Ответом может оказаться хорошо знакомый объект, просто надо посмотреть на него под нужным углом.

Повторяемость. Если конструкция должна состоять из большого числа деталей, проще использовать одинаковые детали. Разные детали можно объединять в одинаковые блоки и строить из блоков.

Симметрии, сдвиги и повороты. Равные части удобнее получать симметрией, сдвигом или поворотом. При работе с симметричными фигурами и позициями стоит сначала поискать симметричное решение. Даже и вне геометрии может сработать раасстановка объектов их по кругу так, чтобы поворот переводил конструкцию в себя.

В путях к решению эти приёмы будут упоминаться наряду с теми, которые рассмотрены в занятиях данной книги.

Занятие 2.
Поиск перебором

«Алё, Вася, у меня машина заглохла!». «А ты дверцей хлопнуть пробовала?» «Да». «А дворниками пошевелила?» «Да». «А шины попинала?» «Да». «Ну тогда я не знаю…»

Цель занятия – научить школьников применять перебор правильно. Во-первых, школьник должен научиться определять, где перебор нужен, а где нет (важно и то, и другое: избыточный перебор одной половины учащихся заметно досаждает учителю; недостаточный или не проведены перебор другой половины учащихся тормозит их развитие). Во-вторых – надо учить перебирать эффективно и излагать перебор компактно и понятно.

Занятие лучше вести как обсуждение представленных школьниками решений. Прежде всего, научите их понимать, где в решении надо *излагать* перебор, а где – не надо. Если достаточно одного примера (скажем, при вопросе «Можно ли»), излагаем только пример без перебора. При задании «Найдите все…» или ответе «Нет» на вопрос «Можно ли» придется излагать полный перебор. Попросите школьника выписать краткий ответ на доске, а затем спросите класс – нужно излагать перебор или нет?

Перебор, который излагается, должен быть полным. Попросите начать изложение со списка всех случаев. Подскажите компактные обозначения: при длинном переборе без них не обойтись. Стоит обсудить, почему в списке представлены *все* возможные случаи. Если есть пропущенные случаи, надо об этом сказать и попросить школьников обнаружить их самостоятельно. Важно подчеркнуть, что надо включать в список даже те случаи, которые не дают вклада в ответ: полное решение должно включать в себя их разбор и отсев.

Важно отметить те свойства, которые помогли сократить перебор. Полезно спросить учеников, нет ли у них решений, где перебор существенно короче. Полезно показать и своё короткое решение, обратив внимание на способы сокращения перебора. Важный приём: перебор не отдельных случаев, а групп (схем, картинок со взаимным расположением и т.п.).

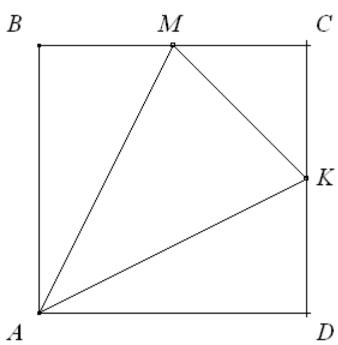
О переборе, который *не* включается в решение, полезно поговорить после того, как решение (*пример*) изложено и одобрено. Его надо предварить словами: «Вот Вася рассказал нам свое решение, оно верно, на олимпиаде больше ничего писать не надо. Но нам с вами интересно узнать, каким путём Вася *нашёл* это решение.» Здесь уже важна не полнота, а эффективность, умение рассматривать случаи, ведущие к примеру, в первую очередь. Обращайте внимание на полезные нестрогие соображения, позволяющие быстрее добраться до примера.

2.1. Существует ли трёхзначное число, которое в 20 раз больше своей суммы цифр?

Ответ: Да, например 180. **Решение.** $180=20\cdot(1+8)$.

Путь к решению. Заметим, что искомое число делится на 20. Среди чисел от 1 до 999 таких всего 49, а среди трехзначных – всего 45. Перебрать их можно за 10 минут – в условиях олимпиады время пренебрежимо малое. Поехали: $100\neq(1+0+0)\cdot20$, $120\neq(1+2+0)\cdot20$, $140\neq(1+4+0)\cdot20$, $160\neq(1+6+0)\cdot20$, $\mathbf{180=(1+8+0)\cdot20}$. Нам повезло: мы нашли пример уже на пятом числе.

2.2. На границе квадрата отметили три точки, соединили их отрезками, и по ним разрезали. В результате квадрат распался на 4 треугольника. Какое наибольшее число из этих треугольников могут оказаться равными?



Ответ: 2 треугольника. **Решение.** Обоснуем *картинку*. Если бы на какой-то стороне квадрата *ABCD* или в её концах не было отмеченных точек, то эта сторона вошла бы в четырёхугольную или пятиугольную часть. Значит, *три* отмеченные точки лежат на четырёх сторонах, то есть, какая-то из точек попала в вершину квадрата. Пусть это точка *A* (см. рис.). Тогда две остальные точки могли попасть только на стороны *BC* и *CD*.

Пример. Если картинка симметрична относительно диагонали *AC*, то есть два равных треугольника – *ABM* и *ADK*.

Оценка. Докажем, что более двух равных треугольников быть не может. Средний треугольник *AMK* не может быть равен крайнему, так как в нём хотя бы две стороны (*AM* и *AK*) больше стороны квадрата, а у крайнего такая сторона максимум одна – гипотенуза. Кроме того, крайний треугольник *MCK* не равен двум другим крайним треугольникам, поскольку у них есть катет, равный стороне квадрата, а у *MCK* оба катета меньше стороны квадрата.

Путь к решению. Перебор возможных картинок был сведён к единственному случаю за счет замеченного *свойства*: отмеченные точки должны быть на каждой стороне квадрата. Отсечение случаев возможных равенств треугольников было сокращено за счет сравнения *самых длинных сторон* треугольников. Фактически был применён *принцип узких мест* (см. занятие 6).

2.3. Расставьте числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 в таблицу 3×3 так, чтобы суммы чисел в любом ряду из трех клеток (по вертикали, горизонтали или диагонали) были одинаковы.

Ответ (единственный, с точностью до поворотов и симметрии):

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Решение. Сумма всех чисел равна 45, значит, в каждой из трёх строк – по 15, но тогда в столбцах и на диагоналях – тоже. Сложим четыре ряда, проходящие через центр – вертикаль, горизонталь и две диагонали, – получим 60. Но в эту сумму все числа таблицы вошли по разу плюс ещё три раза центральное число. Значит, в центре стоит 5. Число 9 может быть: 1) в углу; 2) в середине стороны.

Случай 1) Есть только *две* клетки не в одном ряду с 9: соседи противоположного угла. Значит, из *трёх* чисел 6, 7, 8 какое-то стоит в одном ряду с 9. Вместе с третьим числом этого ряда сумма выйдет больше 15. Противоречие.

Случай 2) Пусть 9 стоит слева от 5 (остальные случаи получаются из этого поворотами). Тогда 1 – напротив 9. Сумма остальных двух чисел на левом краю равна 6. Это могут быть только 2 или 4. Случаи «2 над 9» и «2 под 9» симметричны относительно средней горизонтали. Напротив 2 стоит 8, напротив 4 стоит 6, после чего положения цифр 3 и 7 определены однозначно.

Комментарий. Такая таблица с равными суммами по всем рядам (но не обязательно с последовательными или даже целыми числами) называется *магическим квадратом*. Существуют магические квадраты всех размеров начиная с 3, заполненные последовательными числами.

2.4. В ряд слева направо лежат карточки с надписями «Один», «Два», «Три», «Четыре», «Пять», «Шесть», «Семь», «Восемь», «Девять». Петя подчеркнул 9 разных букв, по одной в каждой надписи. Затем он поменял местами две карточки. Могли ли в результате все подчеркнутые буквы расположиться так, что каждая следующая справа будет стоять в алфавите дальше предыдущей?

Ответ. Нет. **Решение**. В «Один» самая близкая (к началу алфавита) – буква *Д*, а самая далекая в «Два» – тоже *Д*. Значит, первые две карточки должны изменить взаимное расположение. Это можно сделать либо поменяв их друг с другом, либо поменяв «Один» с карточкой, где есть буква ближе *Д*: с «Восемь» или «Девять». В любом случае в карточке на втором месте будет отмечена минимум *Д*, тогда в «Три» — минимум *И*, в «Четыре» — минимум *Р*, в «Пять» — минимум *Т*, в Шесть — минимум *Ш*, в «Семь» — минимум *Ь*. На восьмом месте лежит либо «Восемь», либо поменявшаяся с ней карточка «Один». Но ни в одной из этих карточек нет букв дальше *Ь*.

2.5. Дан шестизначный номер: 123556. Не меняя порядка цифр, расставьте знаки действий и скобки так, чтобы в результате получилось 100.

Ответ: (–1+2+3)(–5+5·6)=1·2:3·5·5·6=100.

Путь к решению. Проще всего получить 100 как произведение. С этого и надо начать. С точностью до перестановки множителей есть 4 способа разложить 100 на два меньших сомножителя: 2·50=4·25=5·20=10·10. Попробуем получить какой-то сомножитель из нескольких начальных цифр. Если использовать не более трех цифр, то есть такие варианты: 1·2=1–2+3=2, –1+2+3=12:3=4, –1+2·3=5. Теперь достаточно из трех последних цифр получить 50, 25 или 20 (впрочем, 50 можно получать и из четырёх последних цифр). Зная, что искать, нетрудно найти –5+5·6=25. Психологически сложнее найти второе решение: надо догадаться, что можно получить множитель 2, разделив 6 на 3 (и при этом **не меняя порядка цифр**)!

Для самостоятельного решения

2.6. Найдите все решения ребуса ПЕ×РЕ=БОР.

2.7. Петя на несколько лет младше Васи, но в 2012 году каждому из них исполнилось столько лет, какова сумма цифр его года рождения. В каком году родился Петя, а в каком – Вася?

2.8. Из четырех монет одна фальшивая – отличается по весу (но неизвестно, в какую сторону), а остальные весят одинаково. Как найти фальшивку за два взвешивания на весах с двумя чашками без гирь?

2.9. Можно ли на клетчатую доску 4×5 поставить ферзя, двух коней и двух ладей так, чтобы каждая фигура побила ровно одну другую и была побита ровно одной другой?

2.10. Существует ли десятизначное число, у которого первая слева цифра равна числу единиц в записи этого числа, вторая – числу двоек, третья – числу троек, четвертая – числу четверок, …, девятая – числу девяток, десятая – числу нулей?

Можно также использовать задачи 6.10, 7.2, 7.3, 7.7, 7.9, A3, A9, A10, A14, A15, A17, A24, A26, B5, B12, B16, B20, B21, B23, B24, B29, C7, C12, C14, C19, C21, C26, C27, D4, D11.

Ответы и решения

2.6. Ответ. 12×42=504, 14×64=896, 39×19=741.

Е×Е оканчивается на Р≠Е, поэтому Е=2,3,4,7,8 или 9, а Р=4,9,6,9,4 или 1 соответственно. Переберём эти 6 случаев.

1) П2×42=БО4. П2<1000/42<30, и П≠2, значит, П=1. 12×42=504 – подходит.

2) П3×93=БО9. Но П3≥13, поэтому П3×93≥13·93>1000> БО9. Решений нет.

3) П4×64=БО6. П4<1000/64<20, значит, П=1. 14×64=896 – подходит.

4) П7×97=БО9. Но П7≥17, поэтому П7×97≥17·97>1000> БО9. Решений нет.

5) П8×48=БО4. П8<1000/48<28, значит, П=1. Но 18×48=864 – не подходит, так как Б≠Е=8.

6) П9×19=БО1. П9<1000/19<59, и П≠1. Проверим случаи П=2, 3 и 4.

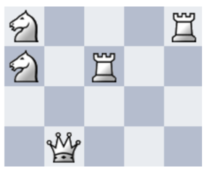
6-1) 29×19=551 – не подходит, так как Б≠О. 6-2) 39×19=741 – подходит.

6-3) 49×19=901 – не подходит, так как Б≠Е=9.

Путь к решению. Повторение букв Е и Р создаёт *узкое место*, поэтому разумно перебирать именно значения Е. Перебор сокращается за счет того, что произведение трёхзначно. Обратите внимание, как мы заранее предъявляли список случаев или подслучаев.

2.7. Вася родился в 1987, Петя – в 2005.
Поскольку самая большая сумма цифр за последние 2000 лет случилась в 1999 году, Васе исполнилось не более 28 лет, то есть он родился не позднее 2012–(1+9+9+9)=1984 года. Будем проверять десятилетиями, обозначая x последнюю цифру года рождения.
1) Если год рождения 198x, то $1980+x+(1+9+8+x)=2012$, откуда $x=7$. Вася мог родиться в 1987.
2) Если год рождения 199x, то $1990+x+(1+9+9+x)=2012$, откуда $2x=3$, что невозможно.
3) Если год рождения 200x, то $2000+x+(2+0+0+x)=2012$, откуда $x=5$. Вася или Петя могли родиться в 2005.
4) Если год рождения 201x, то $2010+x+(2+0+1+x)=2012$, откуда $2x=-1$, что невозможно.
Замечание. Узнав, что год рождения – от 1984 до 2011, мы могли и просто перебрать эти 28 вариантов

2.8. Положим на чаши весов по одной монете. Возможны два случая.
1) Равновесие. Значит, обе монеты на весах – хорошие. Заменим монету на левой чаше на одну из отложенных. Если равновесие, то все монеты на весах – хорошие, и фальшива единственная не взвешенная. При неравновесии фальшива положенная на весы.
2) Неравновесие. Значит, обе не взвешенные монеты – хорошие. Заменим одну из монет на весах на отложенную. При равновесии обе монеты на весах – хорошие, значит, фальшива снятая. При неравновесии фальшива та, что оба раза была на весах.
Путь к решению. Мы можем первым взвешиванием положить на чаши весов по одной монете, или по две. Результат взвешивания по две заранее понятен: будет неравновесие. При этом, раз мы не знаем, тяжелее фальшивка или легче, мы мало что узнаем. Поэтому лучше начать перебор со взвешивания по одной монете. Возможны два случая.
1) Равновесие. Значит, обе монеты на весах – хорошие, а фальшивка – среди отложенных. Значит, при втором взвешивании отложенные не надо класть на одну чашу, иначе мы их не различим. Но и между собой их сравнивать нет смысла: мы узнаем, которая легче, но это ничего не даст. Остаётся сравнить одну из отложенных с одной из взвешенных. Это срабатывает (см. выше).
2) Неравновесие. И в этом случае есть пара монет, среди которых фальшивка, и пара хороших монет. Находим фальшивку как и в предыдущем случае.
Замечание. Полным перебором можно доказать, что если в первый раз взвесить по две монеты, то вторым взвешиванием уже нельзя будет найти фальшивку наверняка.



2.9. Можно, например, так (см. рис).
Путь к решению. Разберёмся прежде всего, кто кого бьёт. Заметим, что либо 1) две фигуры бьют друг друга, а остальные три бьют друг друга по кругу, либо 2) пять фигур бьют друг друга по кругу. В случае (1) тройка не может состоять из трёх разных фигур, иначе двойка состоит из коня и ладьи, а они не могут бить друг друга. Но тогда в тройку входят две одинаковые фигуры. Они бьют друг друга, и третья фигура их бить не может. Противоречие показывает, что случай (1) невозможен.
В случае (2) все побития не симметричны: если А побита Б, то Б не побита А. Значит, одинаковые фигуры друг друга не бьют. Кроме того, ладья не бьёт ферзя (иначе ферзь бы её тоже побил). Значит, ферзя бьёт конь. Теперь круг однозначно восстанавливается (стрелка указывает, кто кого бьёт): ферзь->ладья1->конь1->ладья2->конь2->ферзь. Ясно, что ферзь бьёт

ладью по диагонали. Теперь уже нужная расстановка находится несложным перебором. Например, так.

Ослабим условия: вместо того, чтобы *вписывать фигуры в рамку* будем расставлять их на большой доске, но так, чтобы можно было потом *описать рамку*. Это позволит лучше использовать симметрию. Начнем с *узкого места*: ферзя и побитой им ладьи1. Между ними по диагонали может быть 0, 1 или 2 клетки.

Случай 0. Ферзь и ладья1 рядом. С точностью до симметрии относительно диагонали, поле для коня2 единственное (см. рис. 0). Конь1 побит ладьёй1. Есть всего 2 таких поля, где он не бьёт ферзя, не побит ферзем и другим конем, и вместе с остальными фигурами помещается в рамку. Но поле 1 задаёт рамку, где кони стоят в противоположных углах, и тогда побитая конём1 ладья не побьёт коня2. А выставив коня1 на поле 2, получим, что побитая им ладья2 может побить коня2 только с поля, побитого ферзем.

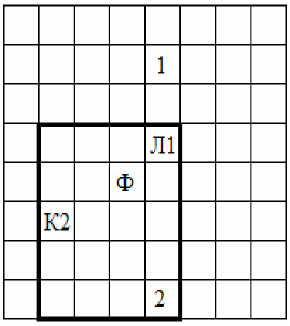


Рис. 0

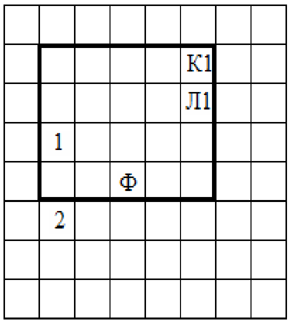


Рис. 1

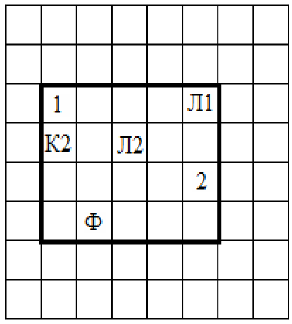


Рис. 2

Случай 1. Между ферзем и ладьёй1 одно поле по диагонали. С точностью до симметрии относительно диагонали, для коня2 есть всего два подходящих поля, они отмечены 1 и 2 на рис. 1. Тогда для коня1 есть единственное подходящее поле (для обеспечения рамки и побитий). Теперь рамка задана однозначно, конь2 должен встать на поле 1, после чего в рамке нет подходящих полей для ладьи2.

Случай 2. Между ферзем и ладьёй1 два поля по диагонали. С точностью до симметрии относительно диагонали, для коня2 есть всего одно поле, после чего рамка задана (см. рис. 2). Теперь подходящее поле для ладьи2 только одно, а вот для коня1 есть два таких поля – 1 и 2, что даёт *два решения* задачи.

2.10. Да, например число 2100010006.

Путь к решению. Достаточно заметить, что а) число полностью задаётся своим набором цифр, и б) сумма цифр числа (и набора) равна 10 (поскольку количество цифр 0 + количество цифр 1 + … + количество цифр 9 равно общему количеству цифр). Давайте *наборы* цифр писать так, чтобы каждая следующая цифра была не больше предыдущей. Выпишем наборы как 10-значные числа по убыванию: 9100000000, 8200000000, 8110000000, 730000000, 7210000000, 7111000000, 6400000000, 6310000000, 6220000000, 6211000000, 6111100000, …. Для каждого набора выпишем соответствующее число: на первом месте число 1, на втором – число двоек и т.д. Например, для 7111000000 выпишем 3000001006 (впрочем, выписывание можно было прервать после первой цифры, поскольку троек в наборе нет). Первый подходящий набор – это 6211000000, он даст число 2100010006.

Замечание. Это решение единственно. Мы перебрали все случаи с 6-ю и более нулями. Покажем, что менее 6 нулей быть не может. Иначе есть не менее 5 ненулевых цифр. Среди них как минимум четыре стоят не на последнем месте, значит, в числе есть как минимум 4 *различных* ненулевых цифры. Их сумма не больше 10, значит это – 1, 2, 3 и 4, но вместе с пятой ненулевой это больше 10 – противоречие.

Занятие 6.

Ослабление условий

Лучше синица в руках, чем журавль в небе.

Опять учим сводить сложную задачу к более лёгкой вспомогательной задаче. На этот раз учим строить сложную конструкцию в несколько шагов, проходя через одну или несколько промежуточных конструкций.
Ещё учим использовать два языка параллельно: житейский и математический.
Занятие лучше построить как серию обсуждений. Для простых задач это будет совместное обсуждение найденных школьниками решений. Для сложных – совместное с учителем решение, где обсуждается, как выбирать следующий шаг. В процессе обсуждений надо показать, как переводить с житейского языка на математический и обратно.
Вот примерные темы для обсуждений.
Дом, пригодный для жилья, строят не сразу: сначала возводят коробку, а окна, двери, отделку добавляют потом. Этот приём называется *постепенное конструирование:* сложный пример строят за несколько шагов, получая цепочку вспомогательных конструкций (*заготовок*). На каждом шаге очередная конструкция *улучшается* до следующей. А как правильнее выбирать заготовки? Какими свойствами они должны обладать?
Искомую конструкцию сложно найти из-за слишком жестких требований. Удобнее строить заготовку, где требования удовлетворены лишь частично. Оставляем *принципиальные* условия, отказываемся или ослабляем *технические*. Попросите определить, какие именно условия в том или ином решении оказались принципиальными, а какие – техническими. Как можно было догадаться именно так разделить условия?

6.1. а) Придумайте три различных натуральных числа, чтобы каждое делилось на разность двух других, и все разности были различны;
б) то же, но все числа больше 100;
в) как в (б), но все разности меньше самого маленького из чисел.
Решение. а) 1, 3, 4. **б)** 1000, 3000, 4000. **в)** 121, 123, 124.
Путь к решению. а) «Как такое может быть?». Самые маленькие разности – это 1, 2, 3. Самые маленькие числа с разностью 3 – это 1 и 4. Между ними надо вставить 2 или 3. Второй вариант подходит.
б) Интуиция должна подсказать, что условие «все числа больше 100» техническое, от него можно *временно* отказаться. Заметим, что если все числа умножить на одно и то же, то и разности умножатся на то же. При этом они останутся разными, и делимость сохранится. Ответ получен умножением на 1000.
в) Умножать запретили… Как ещё можно увеличить все числа? – Прибавить одно и то же число. Тогда ведь разности не изменятся…
Запомните приём: *Неполноценный* пример можно использовать как заготовку для построения *полноценного.*

6.2. Разложите 999 орехов на 4 кучки разного размера, но так, чтобы любые две кучки отличались не больше чем на 4 ореха.
Решение. 248, 249, 250 и 252 ореха.
Путь к решению. Если пытаться делить поровну, то выйдет по 249,75 ореха – увы, не целое. Попробуем округлить: три кучки по 250 и одна 249 орехов. Но одинаковые кучки запрещены… Ладно, перебросив 2 ореха из одной из них в другую, получим вместо них кучки с 248 и 252 орехами!
Комментарий. Как видим, техническими оказались условия о целом числе орехов в кучках и о разной численности кучек.

6.3. Можно ли, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя линий дважды, нарисовать изображенную на рис. 1 фигуру, если пересекать уже нарисованные линии нельзя? (Касаться можно).

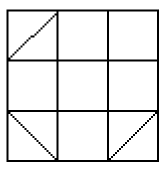


Рис. 1

Решение. Можно. Например, см. рис. 2.

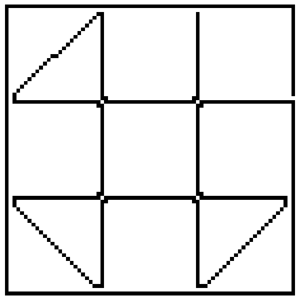


Рис. 2

Путь к решению. Внешний квадрат можно обойти с любого места, ничего не пересекая. Поэтому от его обхода можно *временно* отказаться. Обесцветим квадрат (см. рис. 3) и пока забудем про него. Научимся обходить оставшуюся фигуру.

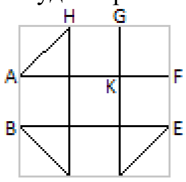
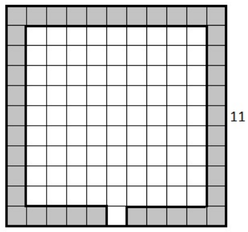


Рис. 3

Откажемся ещё от запрета на самопересечения. Тогда фигуру нетрудно обойти по маршруту GDEBCHAF. При этом возникнут самопересечения в вершинах центрального квадрата. От них нетрудно избавиться, изменив направление обхода угловых треугольников, а также поменяв порядок обхода отрезков GK и KF. К полученному обходу без самопересечений добавим обход внешнего квадрата по часовой стрелке, начиная с точки F.

6.4. Можно ли разрезать квадрат на два меньших многоугольника так, чтобы отношение их площадей было не меньше 2, а отношение периметров – не больше $^1/_2$? (Граница многоугольника должна быть *одной* замкнутой ломаной)



Решение. Можно, см. рис. Удобно резать и вести подсчёты для клетчатого квадрата. Достаточно взять квадрат 11×11. Площадь серой части 39, белой 82, 2·39<82. Периметр серой части 80, белой 38, 2·38<80.

Путь к решению. Малая площадь не обязательно означает малый периметр: фигуру можно сделать длинной, но узкой (сравни, например, с задачей 1.2). Ослабим условия: не будем требовать, чтобы части были многоугольниками. Тогда вырежем центральный квадрат с площадью, близкой к площади исходного. Останется узкая квадратная каёмка, её периметр явно больше удвоенного периметра вырезанного квадрата.

Чтобы превратить каёмку в многоугольник, «разорвём» её в одном месте, прибавив оторванный кусочек к центральному квадрату. Если кусочек мал, то площади и периметры тоже изменятся мало, и нужные неравенства отношений сохранятся.

6.5. Подставьте в знаменатели вместо звёздочек различные натуральные числа, чтобы равенства были верными:

а) $^1/_* + {}^1/_* = {}^1/_* + {}^1/_*$;

б) $^1/_* + {}^1/_* + {}^1/_* + {}^1/_* = {}^1/_* + {}^1/_* + {}^1/_*$.

Решение. Например

а) 1/12 + 1/3 = 1/6 + ¼. **б)** 1/210+1/140+1/105+1/84 = 1/420+1/70+1/60 или 1/360 + 1/180 + 1/90 + 1/40 = 1/120 + 1/72 + 1/45.

Путь к решению. Представим, что дроби уже найдены, и мы их складываем, приведя к общему знаменателю. Тогда суммы числителей должны быть равны! Заметим ещё, что все числители делят общий знаменатель.

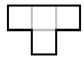
а) Выберем число, у которого много делителей, и найдем среди них две пары с одинаковой суммой. Запишем число в знаменатели, а делители – в числители. Наш пример получился из равенства 1/12+4/12=2/12+3/12.

б) Можно поступить как в (а), но есть и более общий подход. Найдём семь разных натуральных чисел, разбитых на две равные суммы, например 1+6+7=2+3+4+5. Их поставим в числители. Но где же взять такой общий знаменатель, чтобы все они сократились? Не проблема, возьмём их НОК! Получим 1/420+6/420+7/420 = 2/420+3/420+4/420+5/420, откуда первый пример. Второй пример получается из равенства 1+2+4+9=3+5+8 (эти числа дают наименьший НОК).

Запомните приём: домножение на подходящее число часто сводит работу с дробями к работе с целыми числами. Такой приём – пропорциональное изменение размеров – часто используется и в геометрии. Там его называют *метод подобия*.

Для самостоятельного решения

6.6. Сложите из четырёхклеточных фигурок как на рисунке такую же фигуру, но с клетками большего размера.



6.7. 2^8=256=128+64+32+16+8+4+2+1+1 (здесь все делители числа 256 встречаются ровно по разу, повторяется только 1). Аналогично, 2^n представляется в виде суммы n+1 своего делителя с повтором слагаемого 1. Используя такое представление, придумайте число, которое можно представить в виде суммы

а) 10 его различных делителей;

б) 100 его различных делителей.

6.8. Отметьте на плоскости 6 точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой находились ровно 3 отмеченные точки.

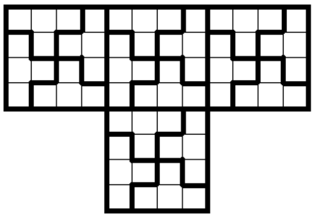
6.9. а) Даны 16 одинаковых по виду монет. Известно, что среди них есть ровно две фальшивые, которые отличаются от остальных по весу (настоящие монеты равны по весу друг другу, и фальшивые монеты также равны по весу друг другу). Как разделить все монеты на две равные по весу кучки, сделав не более трех взвешиваний на чашечных весах без гирь?

б) Та же задача для 14 монет.

6.10. Разбейте квадрат на треугольники так, чтобы каждый граничил ровно с тремя другими по отрезку ненулевой длины.

Можно также использовать задачи A4, A5, A6,A10, A16, A22, B4, B13, B15, B23, B28, B32, B33, C4, C8, C17, C22, C24, D4, D6, D13.

Ответы и решения



6.6. См. рис.

Путь к решению. Фактически нам надо фигурку большего размера разрезать на равные меньшие. На такие замысловатые части мы резать пока не умеем. Ослабим условия: на какие фигурки мы резать умеем? – Да на квадратики. А не получится ли разрезать какой-нибудь квадрат на указанные фигурки?! Это ведь всё равно, что из фигурок составить квадрат. – Ну да, квадрат 4×4 составить удаётся…

6.7. а) 768=376+192+96+48+24+12+6+3+2+1.

Это равенство получено из такого

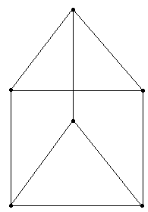
768=3·256=3·128+3·64+3·32+3·16+3·8+3·4+3·2+3·1+2+1.

б) Умножим равенство для 2^{98} почленно на 3. Получим представление числа $3{\cdot}2^{98}$ в виде суммы его 99 делителей, где слагаемое 3 встретится дважды. Заменим последнюю тройку на 2+1, получим сумму 100 делителей.

Путь к решению. Нам явно дано «неполноценное решение». Умножив равенство на любое число, мы снова получим неполноценное решение. Но у умноженного числа делителей стало больше, значит, появился шанс заменить повторившийся делитель на сумму двух меньших делителей. Если, например, мы умножали на нечётное число, то теперь среди слагаемых нет делителей 1, 2, 4. Отлично, мы достигнем цели, если используем в качестве множителя 1+2 или 1+4.

Так можно «улучшить» и полноценное решение: за счет замены увеличим число слагаемых на 1. А поскольку «улучшение» можно делать много раз, то из трёх слагаемых можно сделать сколько угодно.

6.8. См. рисунок. Треугольники на сторонах единичного квадрата – равносторонние. Расстояние между верхними вершинами треугольников равно 1, поскольку нижний получается сдвигом верхнего вниз на расстояние 1. Из каждой точки выходит по 3 единичных отрезка к другим точкам. Для пар точек, не соединенных отрезками, расстояние явно больше или явно меньше 1.



Путь к решению. Легко построить шесть точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой находились ровно *две* отмеченные точки: достаточно взять два равносторонних треугольника далеко друг от друга. А как добиться, чтобы от каждой точки на расстоянии 1 была ещё одна точка другого треугольника? Надо один треугольник получить из другого сдвигом *на расстояние* 1. Правда, надо проследить, чтобы не случилось совпадения вершин или лишних расстояний 1. Убедитесь сами, что для сдвига подойдет любое направление, кроме параллельных сторонам треугольника.

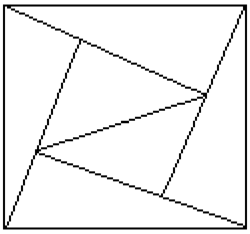
6.9. а) При каждом взвешивании будем класть на весы все 16 монет. Изначально у нас есть одна куча, в которой есть две фальшивые монеты. Сделаем из нее пару куч по 8 монет и разложим их на разные чаши весов. Если фальшивки попали в разные кучи, то будет равновесие (и задача решена), а при неравновесии мы знаем, что обе фальшивки оказались в одной и той же куче. Снимем кучи с весов и разобьем каждую на две четвёрки. Положим снова все монеты на весы, помещая половинки каждой восьмёрки на разные чаши. Если равновесие – всё хорошо, а при неравновесии знаем, что фальшивки оказались в одной четвёрке. Разобьём четвёрки на пары, и снова кладём половинки каждой четвёрки на разные чаши. Если равновесие – всё хорошо, а при неравновесии знаем, что фальшивки оказались в одной паре. По тому же принципу разложим монеты на чаши для четвёртого взвешивания, только проводить его не надо: на этот раз фальшивки наверняка на разных чашах, значит, должно наступить равновесие.

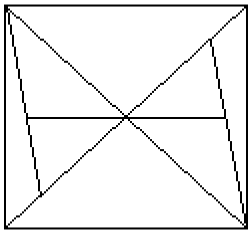
б) Как и в (а), будем взвешивать каждый раз все монеты и перед каждым взвешиванием удваивать число куч, деля каждую старую на пару новых. Метод потребует лишь небольшого уточнения. А именно, если в старой куче число монет нечетно (например, 7), то делим ее «почти пополам»: так, чтобы число монет в «половинках» отличалось на единицу ($7 = 3 + 4$). При этом из первой нечетной кучи положим меньшую половинку на левую чашу, а большую – на правую, со второй нечетной кучей поступим наоборот и т.д. Поскольку число нечетных куч *четно*, на чашах окажется поровну монет.

В результате при первом взвешивании у нас будут на каждой чаше кучи по 7 монет, при втором $3 + 4$, при третьем $1 + 2 + 2 + 2$. В случае трех неравновесий обе фальшивки по-прежнему оказываются в одной куче, и после последнего взвешивания их можно будет гарантированно разложить по разным чашам.

Путь к решению. а) Идея «деления куч пополам» легко усматривается, если сначала решить задачу для 4 монет за одно взвешивание, а затем для 8 монет за два взвешивания. **б)** При меньшем числе монет не получится делить каждую кучу на две *равные* части. Но это и не принципиально. Важно, чтоб размер куч уменьшался: был не меньше 8, затем не меньше 4 и т.д. А равное число монет на чашах можно обеспечить и сложением *неравных* куч.

6.10. Примеров много, два приведены на рис.





Путь к решению. При попытке построить пример обычно возникает проблема: какой-то треугольник Т граничит менее чем с тремя. Т обязательно крайний, то есть примыкает к стороне квадрата, иначе у него точно есть соседи с трёх сторон. Можно ли ему помочь? Да, разобьем соседний треугольник на 2 или 3 треугольника так, чтобы общий отрезок тоже разбился на 2 или 3 части. Если сосед был не крайний, то и полученные части будут не крайними и иметь по 3 соседа. Итак, можно ослабить условие: достаточно *разбить квадрат на треугольники так, чтобы у каждого было не более трёх соседей и каждый граничил с не крайним*. На рис. 2 слева видим пример такого разбиения. У каждого из крайних треугольников ровно по одному соседу. Проведя отрезки AB и AC, обеспечим тремя соседями правый нижний треугольник. Проведя затем отрезки BF, BG, CD и CE, обеспечим тремя соседями два остальных крайних треугольника.

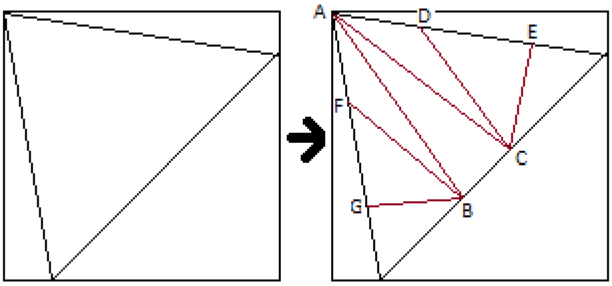


Рис. 2

Идеология

Способные и активные школьники так и сыплют попытками решений, 80% из которых содержат интересные идеи, но в целом неверны или не закончены. Преподаватель должен научить учеников такие *частичные* решения распознавать и доводить до *полных*. «Ослабление условий» – один из приёмов, помогающий такой доводке. Этот приём универсальный, он работает не только в комбинаторных задачах, но и в геометрии (см. [1], глава «Методы подобия и гомотетии»). Предпосылкой к применению служит необходимость построения сложной конструкции. Однако нет формальных признаков, которые указали бы, когда приём сработает, а когда нет. Помогают аналогии с житейскими ситуациями. Поэтому и надо показать, что между житейской и математической логикой есть тесная связь. Именно этот момент и вызывает наибольшую трудность. Ученикам кажется, что приёмы, изложенные на житейском языке, не надёжны, не точны, не универсальны. На самом деле, им просто трудно переводить с житейского языка на математический. Преодолеть эту трудность поможет серия хорошо выстроенных обсуждений. Навык такого перевода даже более важен, чем усвоение приёма «Ослабление условий». Конечно, на обучение переводу требуется время. Часто у учителя возникает искушение *ускорить процесс* обучения, формулируя задачи на рафинировано-математическом языке. Но выигрыш будет мнимым: мы получим, скажем, школьника, умеющего решить квадратное уравнение, но не способного решить геометрическую или комбинаторную задачу, легко сводящуюся к такому уравнению.

Рубрикатор

1. Много не мало

6.4, 7.5, A2, A7, A8, A11, A12, A18, B4, B9, B11, B17, B19, B32, C2, C4, C10, C15, C24, D6, D10.

2. Поиск перебором

6.10, 7.2, 7.3, 7.7, 7.9, A3, A9, A10, A14, A15, A17, A24, A26, B5, B12, B16, B20, B21, B23, B24, B29, C7, C12, C14, C19, C21, C26, C27, D4, D11.

3. Преодолеть инерцию мышления

1.7, 1.10б, 5.6, 7.3, 7.5, A2, A6, A7, A13, A19, A20, A21, A25, B3, B22, B25, B26, B27, B29, B31, B34, B35, C2, C10, C20, C25, C27, D5, D8, D12, D13, D14

4. Редукция и разминка

1.10б, 2.10, 7.2, 7.4,7.7, 7.8, A1, A8, A18, A21, B6, B8, B9, B10, B14, B15, B17, B22, C3, C5, C6, C7, C9, C11, C12, C13, C15, C20, C26, D3, D5, D7, D9 , D10, D12, D14

5. Узкие места

2.2, 2.4, 2.6, 2.9, 3.2, 3.10, 6.3, 6.10, 7.5, A3, A4, A7, A12, A15, A18, A23, A24, A26, B1, B7, B11, B14, B16, B20, B25, B30, C1, C5, C6, C13, C14, C19, C21, C23, C26, D8, D9

6. Ослабление условий

2.9, A4, A5, A6,A10, A16, A22, B4, B13, B15, B23, B28, B32, B33, C4, C8, C17, C22, C24, D4, D6, D13.

7. Геометрия

2.2, 3.7, 3.10, 3.11, 5.4, 5.10, 6.8, 6.10, A5, A6, A8, A10, A16, A22, A24, B1, B2, B3, B6, B8, B12, B15, B18, B27, B30, B33, B34, C1, C2, C4, C5, C15, C21, C23, C25, C26, C27, C28, D2, D3, D6, D7, D8, D9, D11, D12.

Как такое может быть?

1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.10а, 3.1, 3.4, 3.5, 3.8, 3.9, 7.1, A4, A27, B2, B19, B21, B30, D11, D14.

Ищи где удобнее

1.4, 2.1, 2.5, 6.5, A9, A17, B5, B7, B8, B12, B21, B32, C10, C16, C19, D2, D13, D14.

Высматривай знакомое

1.10а, 4.4, 4.7, 4.8, 7.1, 7.2, 7.6, 7.7, B1, B18, C6, C24, C26, C28, D1, D6, D13.

Повторяемость

2.7, 4.1в, 4.2, 4.3, 4.5бв, 4.6, 4.9, 4.10, 6.2, A1, B6, B14, B16, B17б.

Симметрии, сдвиги и повороты

1.1, 2.3, 2.9, 4.1аб, 4.5а, 6.8, A5, A11, A13, A19, A22, B3, B16, B24, B26, B34, C11, C18, C23, D1

Авторы задач

Задачи нескольких авторов отмечены *курсивом*.

Большинство использованных в книге задач давно и заслуженно стали математическим фольклором, или восходят к нему. Их обычно публикуют без указания авторов. Это, однако, не повод умалчивать об авторах, когда они известны. Проще всего узнать свои собственные задачи: 1.7, 1.10а, 2.2, 2.4, 2.6, 2.9, 3.3, 4.3, 4.5, 4.7, 4.10, 5.1, 5.2, 5.4, 5.8, 5.9, 6.1, 6.2, 6.4, 6.5, 6.6, 6.9, 6.10, 7.2, 7.3, 7.6, 7.7, 7.9, A2, A7, A8, A9, A10, A12, A15, A16, A17, A21, A22, A23, A24, B4, B5, B7, B8, B9, B11, B12, B13, B14, *B15*, B16, B18, B20, B21, B24, B25, B28, B29, B31, B32, C6, C7, C8, C9, C11, C12, C16, C18, C26, D3, D6, D7а, D8, D13. Других задач с известным автором не так много, но зато почти все –

жемчужины: А.Д.Блинков: *D1*; М. Гарднер: C10; М.Л. Гервер: C13; В. М. Гуровиц: 3.5, *D1*; Р.Г. Женодаров: 4.1, C14; А.А. Заславский: D11; А.Я. Канель-Белов: B22, B34, *C25, D12*; Т.В. Караваева: B35; К.А. Кноп: 3.11, A3, A4, *B15б*; А.К. Ковальджи: 1.10б; Д.Ю. Кузнецов: A26; С.В. Маркелов: C23, *C25*, D12; В.В. Произволов: C21, *C25*; А. Перлин: D5; А. Рубин: D2; Н.П. Стрелкова: B30; С.И. Токарев: 3.9, A18, B10, C19, C22, *C24*, C27; В.А.Уфнаровский: A25; Э. Фридман: D9; А.В. Хачатурян: 5.6; Д.А. Шаповалов 3.2; А.Ю. Эвнин: *C24*. Спасибо этим авторам, а также тем неизвестным, кто сочинил фольклорные жемчужины!

Литература

1. А.Д.Блинков, Ю.А.Блинков А. *Геометрические задачи на построение.*
– М.: МЦНМО, 2012.
2. А. В. Шаповалов. *Как построить пример?* – М.: МЦНМО, 2013.
3. А. В. Шаповалов. *Принцип узких мест.* – М.: МЦНМО, 2012.
4. А. В. Шаповалов, Л.Э. Медников. *XVII Турнир математических боев им. А.П.Савина.* – М.: МЦНМО, 2012.
5. А. В. Шаповалов, Л.Э. Медников. *Как готовиться к математическим боям. 400 задач турниров им. А.П.Савина.* – М.: МЦНМО, 2014.

Список веб-ресурсов

1. www.problems.ru – база задач по математике.

2. www.ashap.info – сайт автора.